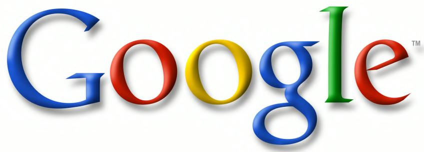
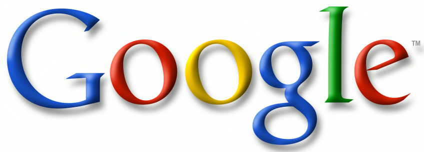




Alexander Ziwet

LEITFADEN

DER

EBENEN GEOMETRIE

MIT BENUTZUNG

NEUERER ANSCHAUUNGSWEISEN FÜR DIE SCHULE

BEARBEITET VON

DR. HUBERT MÜLLER,

OBERLEHRER AM KAISERLICHEN LYCEUM IN METZ,
FRÜHER AUSSERORDENTLICHER PROFESSOR DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG I. B.

IN ZWEI TEILEN UND EINEM ANHANGE.

I. DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS. ANHANG ZU I. HARMONISCHE PUNKTE ETC., POTENZLINIEN, POL UND POLARE. KREISBERÜHRUNGEN UND BRENNPUNKTSEIGENSCHAFTEN DER KEGELSCHNITTE.
II. DIE ELEMENTE DER NEUERN GEOMETRIE UND DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE.

ERSTER TEIL. ERSTES HEFT.

DIE GERADLINIGEN FIGUREN UND DER KREIS MIT ÜBUNGEN.

DRITTE AUFLAGE.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1889.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Es ist schon vielfach bemerkt worden, dafs die Geometrie der Alten, sowohl in Bezug auf die Einheit des Systemes als in Bezug auf die Anregung und Bildung der Vorstellungskraft weit hinter der Geometrie der Lage, die auch als neuere Geometrie bezeichnet wird, zurücksteht.

Der hieraus entsprungene Wunsch, Teile aus der Geometrie der Lage für die Schule zu verwenden, hat mehreren schätzenswerten Werken über das Grenzgebiet der alten und neuern Geometrie die Entstehung gegeben und ist die Veranlassung davon, dafs in vielen Schulbüchern die der neuern Geometrie verwandten Teile mit Vorliebe behandelt werden. Der auf diese Weise gewonnene Einflufs dieser Disziplin auf die Schule kommt jedoch nicht allen Anstalten zu Gute, weil vielfach die Zeit fehlt, um sich in den betreffenden Kapiteln mit Mufse umzusehen. Ich habe nun in dieser Arbeit von Anfang an versucht, so viel es mir möglich schien, Anschauungsweisen, welche der Geometrie der Lage entnommen sind, in den Lehrstoff einzuflechten.

Indem ich dieses Schulbuch der Beurteilung meiner Fachkollegen übergebe, kann ich nicht umhin eines Gutachtens Erwähnung zu thun, mit welchem mich mein unvergefslicher Lehrer, der in Göttingen verstorbene Professor Dr. Alfred Clebsch, zur Herausgabe der Arbeit aufmunterte. Derselbe sprach sich dahin aus, dafs eine Umbildung vieler Teile der in den Schulen gelehrten Geometrie an der

Hand der neuern Geometrie ein Bedürfnis der Zeit sei, dafs er vorliegenden Leitfaden als eine willkommene Gabe für die Schule betrachte und das Erscheinen desselben in Tendenz und Inhalt freudig begrüfsen würde. Ich wünsche, dafs die Ansicht eines wissenschaftlich so hoch stehenden Mannes eine gute Vorbedeutung für den Erfolg des Büchleins sein möge.

Metz, im März 1874.

Dr. **H. Müller.**

Vorwort zur dritten Auflage.

Wie in der Vorrede zur zweiten Auflage, so sei auch jetzt wieder auf die Resolution hingewiesen, mit welcher auf der 31. Versammlung deutscher Schulmänner und Philologen die Methode dieses Leitfadens gebilligt wurde:

„Im Unterricht der Elementargeometrie an Realschulen und Gymnasien bleibt die Euklidische Geometrie dem System nach bestehen, wird aber im Geiste der neueren Geometrie reformiert. — Die Sektion begrüſst mit groſser Freude die von Dr. H. Müller eingeleiteten Schritte.“

Es ist in neuerer Zeit von verschiedenen Seiten darauf hingewiesen worden, daſs es wünschenswert sei, der neueren synthetischen Geometrie Eingang in den Schulen zu verschaffen, so z. B. in der Rektoratsrede des Herrn Prof. Dr. Th. Reye in Straſsburg im Mai 1886. In Bezug auf diese Bestrebungen möchte ich nochmals die Punkte aufzählen, in welchen dieser Leitfaden, wenn er auch am Euklidischen Lehrstoffe festhält, nach dem Geiste der neueren Geometrie bearbeitet ist.

1) Das Prinzip der Starrheit ist beseitigt. Diese Beseitigung ist allerdings bei den gebräuchlichsten gegenwärtigen Lehrbüchern schon in einigen Definitionen und in der Form mancher Sätze angenommen; aber dieselbe ist in diesen Schriften nicht durchgeführt*), wodurch ein Mangel an Konsequenz entsteht.

*) Siehe meine Broschüre: „Besitzt die heutige Schulgeometrie noch die Vorzüge des Euklidischen Originals?“ Metz bei G. Scriba.

2) Die eindeutigen Konstruktionen sind zur Folgerung von Lehrsätzen verwendet, wie es in der neueren Geometrie, nicht aber in der Euklidischen Geometrie geschieht.
3) Wie die neuere Geometrie sich mit der Verwandtschaft der Figuren beschäftigt, so sind hier die Kongruenz (Symmetrie) und Ähnlichkeit als einfachste Verwandtschaften behandelt und zur Ableitung von Sätzen herangezogen worden..
4) Bei der Symmetrie wie bei der Ähnlichkeit der Figuren ist der auch für die Schulgeometrie wichtige Übergang von den geschlossenen Figuren zu den Punktsystemen durchgeführt.

In dieser dritten Auflage finden sich viele Verbesserungen und Vereinfachungen (z. B. in der Parallelentheorie), welche einzeln aufzuzählen zu weitläufig wäre. Die Paragraphen 10 und 11 über Symmetrie sind weggefallen. Dagegen ist die Konstruktion und Kongruenz der Dreiecke aus den Übungen in den Haupttext aufgenommen (§ 18 und 19). Dadurch ist mehr Gleichmafs hergestellt, während früher die Symmetrie zu viel Raum beanspruchte. In den „Übungen" ist eine grofse Anzahl von Konstruktionsaufgaben in bereits vorhandene Nummern eingefügt worden.

Metz, im Mai 1889.

Dr. **H. Müller.**

Inhaltsverzeichnis.

I. Abschnitt.

Die Grundgebilde.

Lagen von Punkten und Geraden. § 1.

Der Punkt und die gerade Linie sind die Grundgebilde der Planimetrie. Die Eigenschaften derselben sind Grundsätze dieser Wissenschaft und bedürfen keines Beweises.

a) Es giebt unendlich viele Gerade einer Ebene, welche durch einen Punkt derselben gehen.

Die Gesamtheit dieser Geraden bildet einen Strahlenbüschel. Der gegebene Punkt wird der Scheitel des Strahlenbüschels genannt.

α) Es giebt unendlich viele Punkte, welche auf einer Geraden liegen.

Die Gesamtheit dieser Punkte bildet eine Punktreihe. Die gegebene Gerade wird der Träger dieser Punktreihe genannt.

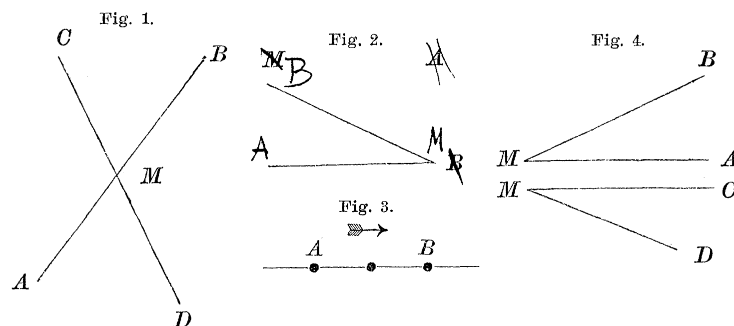
b) Es giebt nur eine Gerade, welche durch zwei Punkte zugleich geht, die Verbindungslinie dieser Punkte.

β) Es giebt nur einen Punkt, welcher auf zwei Geraden zugleich liegt, nämlich der Schnittpunkt dieser Geraden.

Winkel und Strecken. § 2.

a) Zwei Gerade, welche sich schneiden, teilen die Ebene in 4 Felder, welche Winkel genannt werden (Fig. 1). Der

α) Zwei Punkte einer Geraden begrenzen ein Stück derselben, welches Strecke genannt wird (Fig. 3). Die Gerade,



Schnittpunkt der Geraden ist der Scheitelpunkt der 4 Winkel. MA und MB (Fig. 2) sind die Schenkel des Winkels AMB oder BMA.

b) Der Winkel wird durch Drehung beschrieben, wenn sich der eine Schenkel (Anfangsschenkel) um den Scheitel dreht, bis er mit dem andern Schenkel (Endschenkel) zusammenfällt.

welche die beiden Punkte enthält, heifst der Träger der Strecke. Die Punkte A und B sind die Endpunkte der Strecke AB oder BA.

β) Die Strecke AB wird von dem Punkte A (Anfangspunkt) beschrieben, wenn derselbe den geradlinigen Weg Weg von A bis B (Endpunkt der Strecke) zurücklegt.

Anmerkung. Man gebraucht die Schreibweise AMB oder BMA, je nachdem man MA oder MB als Anfangsschenkel des Winkels in Fig. 2 ansieht. Zwei Winkel heifsen von einerlei Sinn, wenn die Anfangsschenkel beider Winkel sich in gleichem Sinne drehen müssen, um mit den Endschenkeln zusammenzufallen. Im andern Falle sind die Winkel von entgegengesetztem Sinne. Die Winkel AMB und DMC in Fig. 4 sind gleichen Sinnes, dagegen die Winkel AMB und CMD von entgegengesetztem Sinne. Man gebraucht die Schreibweise AB oder BA, je nachdem man annimmt, dafs die Strecke in Fig. 3 durch Bewegung von A nach B oder durch Bewegung von B nach A beschrieben wird. Die Strecken AB und BA haben entgegengesetzte Richtung.

c) Der „Vollwinkel" wird durch eine ganze Umdrehung beschrieben (wenn sich der Schenkel MA in Fig. 1 durch die Lagen MC, MB, MD dreht, bis er wieder nach MA fällt); seine Schenkel fallen zusammen.

Der „gestreckte Winkel" wird durch eine halbe Umdrehung beschrieben (wenn sich MA in Fig. 1 durch die Lage MC dreht, bis die Lage MB erreicht ist); seine Schenkel haben entgegengesetzte Richtung.

Der „rechte Winkel" wird durch eine Viertelumdrehung beschrieben; er ist die Hälfte des gestreckten Winkels; von seinen Schenkeln sagt man, dafs sie „senkrecht" auf einander stehen.

d) Als Einheit für das Messen (§ 56) der Winkel nimmt man den Grad (^{0}), d. h. einen Winkel, der 360mal in dem Vollwinkel aufgeht. Der Grad wird in 60 Minuten ($'$) und die Minute in 60 Sekunden ($''$) geteilt. Als Einheit für das Messen der Strecken dient das Meter (m). Das Meter wird

in 10 Decimeter (dm), das Decimeter in 10 Centimeter (cm) und das Centimeter in 10 Millimeter (mm) geteilt.

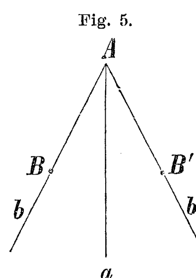
Der gestreckte Winkel enthält 180^0, der rechte Winkel 90^0. „Hohle Winkel“ heifsen diejenigen, deren Gradzahl zwischen 0 und 180 liegt. „Erhabene Winkel“ heifsen die Winkel, deren Gradzahl zwischen 180^0 und 360^0 liegt. Die hohlen Winkel heifsen „spitz“, wenn sie kleiner als 90^0 und „stumpf“, wenn sie gröfser als 90^0 sind.

e) Supplementwinkel sind solche Winkel, deren Summe gleich einem gestreckten Winkel ist. Zu dem Winkel von x Grad gehört der Winkel von $180 - x$ Grad als Supplementwinkel. Komplementwinkel sind solche Winkel, deren Summe gleich einem rechten Winkel ist. Zu dem Winkel von x Grad gehört der Winkel von $90 - x$ Grad als Komplementwinkel.

Symmetrie in Bezug auf eine Achse. **§ 3.**

a) Wenn man einen Winkel (BAB' in Fig. 5) um seine Halbierungslinie a umklappt, so fällt jeder der beiden Schenkel AB und AB' in die frühere Lage des andern. Wenn die Punkte B und B' dieser Schenkel vom Scheitel A gleiche Entfernung haben, so deckt auch jeder dieser Punkte die frühere Lage des andern.

Fig. 5.



Hieraus folgt auch, dafs die ganze Figur nach dem Umklappen um die Linie a ihre frühere Lage deckt; denn die Gerade a ändert dabei ihren Ort nicht, die Geraden b und b' vertauschen ihre Lage und die Punkte B und B' thun dasselbe.

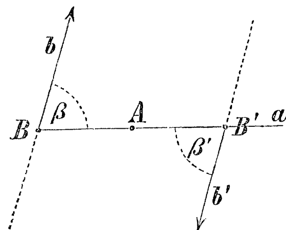
b) Eine Figur, welche nach dem Umklappen um eine Gerade a ihre frühere Lage deckt, heifst symmetrisch für diese Gerade a als Achse. Zwei Stücke, welche (wie die Geraden b und b', die Punkte B und B') durch das Umklappen ihre Lagen vertauschen, heifsen symmetrisch entsprechend (auch homolog) für die Achse.

Anmerkung. Das Auf- und Zuklappen eines Buches führt zur Veranschaulichung dieser Symmetrie. Nur bleibt dabei die eine Hälfte der Ebene in ihrer früheren Lage liegen, und anstatt zu sagen: der Punkt B deckt die frühere Lage von B', mufs man sagen: der Punkt B deckt den Punkt B'.

§ 4. Symmetrie in Bezug auf einen Punkt.

a) Wenn man die Strecke BB' (Fig. 6) um ihren Mittelpunkt halb herum dreht, so fällt jeder der Punkte B und B' in die frühere Lage des andern. Wenn die Geraden b und b' durch diese Punkte unter gleichen Winkeln (Wechselwinkel nach § 7) gezogen sind, so deckt auch jede dieser Geraden die frühere Lage der andern.

Fig. 6.



Hieraus folgt auch, dafs die ganze Figur nach der halben Umdrehung um A ihre frühere Lage deckt, denn der Punkt A bleibt an seiner Stelle, die Gerade BB' fällt in ihre alte Lage, die Punkte B und B', sowie die Geraden b und b' vertauschen ihre Lagen.

b) Eine Figur, welche nach einer halben Umdrehung in der Ebene um einen Punkt A ihre frühere Lage deckt, heifst symmetrisch für diesen Punkt als Mittelpunkt. Zwei Stücke, welche (wie die Punkte B und B' oder die Geraden b und b') durch die halbe Umdrehung ihre Lagen vertauschen, heifsen symmetrisch entsprechend für den Mittelpunkt.

Durch die halbe Umdrehung um A kommt der obere Teil (über BB' gelegen) der Fig. 6 in die frühere Lage des unteren Teiles. Wenn daher die Geraden b und b' sich über BB' schnitten, so müfsten sie sich unterhalb BB' noch einmal schneiden, was nach § 1 unmöglich ist.

c) Zwei gerade Linien (wie b und b' in Fig. 6) heifsen parallel, wenn sie einander nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern mag.

§ 5. Nebenwinkel und Scheitelwinkel.

a) Zwei Winkel heifsen Nebenwinkel, wenn sie den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben, während die andern Schenkel in entgegengesetzte Richtung fallen.

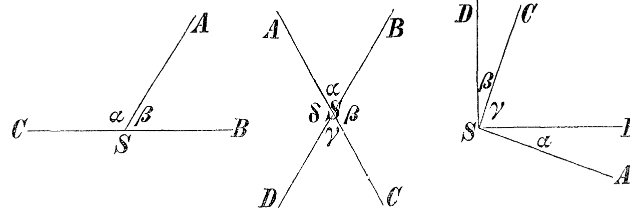
b) Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich einem gestreckten Winkel oder 180^0. Wenn zwei Nebenwinkel gleich sind, so ist jeder ein Rechter.

Zum Beweis der ersten Behauptung denke man sich in Fig. 7 den Schenkel SA fort.

c) Zwei Winkel heifsen Scheitelwinkel, wenn sie den

Scheitel gemeinsam haben, während die Schenkel paarweise in entgegengesetzte Richtung fallen.

d) Scheitelwinkel sind einander gleich.



Beweis. Die Scheitelwinkel α und γ in Fig. 8 sind einander gleich; denn als Nebenwinkel von β betragen beide $180^0 - \beta$.

e) Zwei Winkel sind gleich, wenn ihre Schenkel paarweise nach einerlei Seite auf einander senkrecht stehen.

Beweis. Die Anfangsschenkel der Winkel α und β in Fig. 9 mögen den rechten Winkel ASC, die Endschenkel den rechten Winkel BSD bilden. Dann sind beide Winkel α und β Komplementwinkel zu γ und sind gleich, weil sie beide $90^0 - \gamma$ betragen.

Sätze über symmetrische Figuren. § 6.

B (Fig. 10) sei ein beliebiger Punkt der Ebene. Derselbe möge durch das Umklappen um die Achse a in die Lage B' kommen. Der Punkt B' seinerseits wird durch das Umklappen nach B zurückgebracht*). B und B' sind also nach § 3b entsprechende Punkte. Die Verbindungslinie BB' schneidet die Achse in einem Punkte D. Durch das Umklappen deckt jede der Strecken DB und DB' die frühere Lage der andern. Also ist $DB = DB'$ und D ist die Mitte von BB'. Ferner deckt beim Umklappen jeder der Winkel α und α' die frühere Lage

(Fig. 11.) b sei eine beliebige Gerade, welche die Achse a in dem Punkte A schneidet. Diese Gerade werde durch das Umklappen nach b' gebracht. Dann zeigt man gerade wie vorhin, dafs b' durch das Umklappen nach b zurückgebracht wird, also b und b' nach § 3b entsprechende Gerade sind. Der Punkt A bleibt bei der Bewegung auf seiner Stelle, folglich mufs die neue Lage, welche b nach dem Umklappen hat, d. h. die Gerade b', auch durch A gehen. Aufserdem deckt durch das Umklappen jeder der Winkel α und α' die frühere Lage des andern, woraus

*) B' ist dem Punkte B um einen halben Umschwung voraus und mufs durch das Umklappen dahin geführt werden, wohin B erst nach einem ganzen Umschwunge gelangt, nämlich nach B zurück.

des andern. Diese Winkel müssen also gleich sein und, weil sie Nebenwinkel sind, ist jeder ein rechter Winkel.

folgt, dafs a den Winkel der Richtungen b und b' halbiert.

a) Wenn zwei Punkte B und B' sich für eine Achse a entsprechen, so ist a die Mittelsenkrechte von BB'.

α) Wenn zwei Richtungen b und b' sich für eine Achse a entsprechen, so ist a die Halbierungslinie des von b und b' gebildeten Winkels.

Fig. 10.

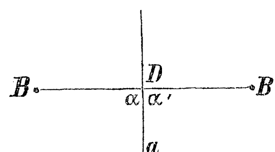
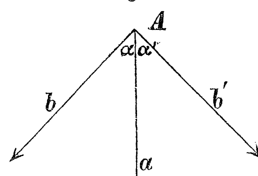


Fig. 11.



Umgekehrt:

b) Zwei Punkte B und B' entsprechen sich für die Mittelsenkrechte der Strecke BB'.

β) Zwei Richtungen entsprechen sich für die Halbierungslinie ihres Winkels.

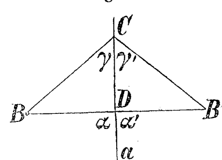
Das in β) Gesagte ist schon in § 3a enthalten und b) ist nur ein besonderer Fall von § 3a.

c) Strecken oder Winkel, welche einander symmetrisch entsprechen, sind gleich.

Dieselben werden durch das Umklappen um eine Achse oder durch die halbe Umdrehung zur Deckung gebracht.

d) Anwendungen. 1) In einem Punkte einer Geraden kann man nur eine Senkrechte errichten. 2) Von einem Punkte aufserhalb einer Geraden kann man nur eine Senkrechte auf die Gerade fällen.

Fig. 12.



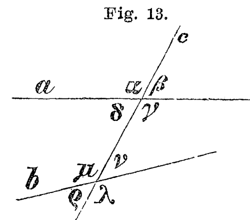
Beweis. 1) Ein gestreckter Winkel hat wie jeder andere Winkel nur eine Halbierungslinie, welche eben durch die im Scheitel errichtete Senkrechte dargestellt ist. 2) Wenn man den Punkt B mit dem entsprechenden B' verbindet, so hat man eine von B auf a gefällte Senkrechte BD erhalten (§ 6a). Wenn auch BC auf a senkrecht wäre, so müfste γ ein rechter Winkel sein. Da aber durch das Umklappen um a der Winkel

γ auf γ' fällt, so wäre auch γ' recht und die Punkte B, C, B' lägen auf einer Geraden. Dies ist nach § 1b unmöglich.

Winkelbezeichnungen. § 7.

Wenn zwei Gerade a und b (Fig. 13) von einer dritten c geschnitten werden, so entstehen 8 Winkel, vier innere (δ, γ, ν, μ) und vier äufsere (α, β, λ, ϱ). Die Winkel an verschiedenen Schnittpunkten werden auf folgende Arten paarweise zusammengefafst:

Fig. 13.



1) Zwei äufsere oder zwei innere Winkel auf verschiedenen Seiten der Schnittlinie heifsen Wechselwinkel.

2) Ein äufserer und ein innerer Winkel auf derselben Seite der Schnittlinie heifsen korrespondierende Winkel.

3) Zwei äufsere oder zwei innere Winkel auf derselben Seite der Schnittlinie heifsen Ergänzungswinkel.

Zwei Gerade, welche von einer dritten geschnitten werden. § 8.

a) Wenn innere Wechselwinkel gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel. (Siehe § 4.)

b) Grundsatz. Wenn innere Wechselwinkel ungleich sind, so sind die geschnittenen Linien nicht parallel.

Die Anschauung zeigt, dafs sie sich auf der Seite schneiden, wo der kleinere Winkel liegt (Fig. 16).

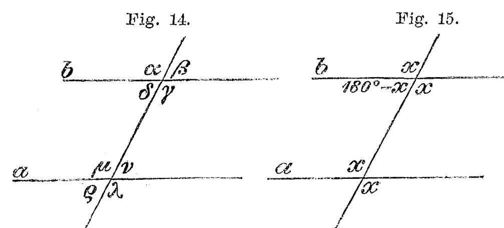
c) Die geschnittenen Linien sind parallel

1) wenn zwei korrespondierende Winkel gleich sind;

2) wenn zwei Wechselwinkel gleich sind;

3) wenn zwei Ergänzungswinkel zusammen 180^0 betragen.

Fig. 14. Fig. 15.



Beweis. 1) Wenn die korrespondierenden Winkel α und μ in Fig. 14 gleich sind, so bezeichne man beide mit x (Fig. 15). Dann ist auch $\gamma = x$ als Scheitelwinkel von α. Die innern

Wechselwinkel γ und μ sind also gleich (weil beide gleich x sind) und die geschnittenen Linien sind nach a) parallel.

2) Sind äufsere Wechselwinkel, z. B. α und λ in Fig. 14, einander gleich, so bezeichne man beide mit x (Fig. 15). Dann ist auch $\gamma = x$ als Scheitelwinkel von α und $\mu = x$ als Scheitelwinkel von λ u. s. w.

3) Sind 2 Ergänzungswinkel, z. B. δ und μ in Fig. 14, zusammen 180^0 und bezeichnet man den einen μ mit x (Fig. 15), so ist $\delta = 180^0 - x$. Dann ist auch $\gamma = x$ als Nebenwinkel von δ; die innern Wechselwinkel γ und μ sind also einander gleich (weil beide gleich x sind) u. s. w.

d) Wenn die geschnittenen Linien parallel sind, so sind

1) korrespondierende Winkel gleich;

2) Wechselwinkel sind gleich;

3) Ergänzungswinkel betragen zusammen 180^0.

Beweis. Wenn die Linien a und b in Fig. 14 parallel sind, so müssen die Winkel γ und μ gleich sein; denn wenn diese Winkel nicht gleich wären, so wären die Geraden a und b nicht parallel (Grundsatz b). Bezeichne die gleichen Winkel γ und μ mit x (Fig. 15). Dann ist auch $\alpha = x$ als Scheitelwinkel von γ; die korrespondierenden Winkel α und μ sind also gleich, weil beide gleich x sind. Ferner ist auch $\lambda = x$ als Scheitelwinkel von μ; folglich sind die äufseren Wechselwinkel α und λ gleich, weil beide gleich x sind. Ferner ist $\delta = 180^0 - x$ als Nebenwinkel von γ. Die Ergänzungswinkel μ und δ sind also zusammen 180^0, weil $x + 180^0 - x = 180^0$.

Fig. 16.

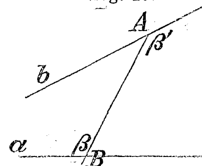
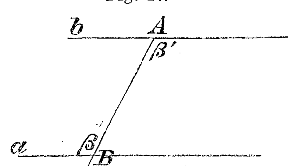


Fig. 17.



e) Durch einen Punkt A kann man nur eine Parallele zu einer Geraden a ziehen (Fig. 17).

Beweis. Denke durch A die Gerade AB gezogen, welche a schneidet und den Winkel β entstehen läfst. Ist b eine Parallele zu a, so mufs $\beta' = \beta$ sein; die Linie b kann daher nur eine Lage haben; sie ist der freie Schenkel des in A angetragenen Winkels $\beta' = \beta$.

§ 9. **Fortsetzung.**

a) Wenn die eine von zwei Parallelen durch eine dritte geschnitten wird, so wird es auch die andere.

Beweis. a und b (Fig. 18) seien parallel. c schneide a in M. Wenn c mit b parallel wäre, so gingen durch M zwei zu b parallele Gerade, was § 8e widerspricht.

Fig. 18.

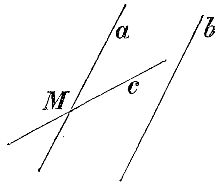


Fig. 19.

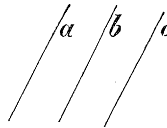
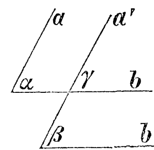


Fig. 20.



b) Wenn zwei Gerade mit einer dritten parallel sind, so sind sie unter sich parallel.

Beweis. b und c (Fig. 19) seien mit a parallel. Wenn b und c sich schnitten, so würden durch den Schnittpunkt M zwei zu a parallele Gerade b und c gehen, was § 8e widerspricht.

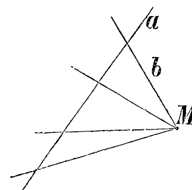
c) Winkel, deren Schenkel paarweise in gleicher Richtung parallel laufen, sind gleich.

Beweis. Die Winkel α und β (Fig. 20) sind gleich, weil sie beide dem Winkel γ gleich sind (§ 8d).

d) Parallele Gerade können als Linien angesehen werden, die einen unendlich fernen Punkt mit einander gemeinsam haben. Einer Geraden schreibt man nur einen unendlich fernen Punkt zu.

Wenn man die eine a (Fig. 21) von zwei konvergenten Geraden festhält und die andere b um einen ihrer Punkte M dreht, so tritt der Parallelismus erst ein, nachdem der Schnittpunkt von a und b nach der einen oder andern Seite in unendliche Ferne gerückt ist, und die letzteren beiden Lagen sind von der parallelen Lage unendlich wenig verschieden, womit der Sinn der ersten Behauptung ausgesprochen ist. Die nach den entgegengesetzten Richtungen der Geraden a liegenden unendlich fernen Punkte werden nur als ein Punkt betrachtet, weil sie mit M zusammen nur eine einzige Gerade, nämlich die Parallele bestimmen, oder um dies etwas anders auszudrücken, weil sonst die durch M gezogene Parallele mit a zwei Punkte gemein hätte, ohne mit a zusammenzufallen.

Fig. 21.



Anmerkung. Dafs man gerade im gewöhnlichen Leben Linien, die einen fernen Punkt gemein haben, als parallele

Linien oder Linien von gleicher Richtung ansieht, folgt daraus, dafs zwei Beobachter in gleicher Richtung zu schauen behaupten, wenn sie nach demselben sehr weit entfernten Punkte sehen.

II. Abschnitt.

Entstehung von Figuren und allgemeine Eigenschaften derselben.

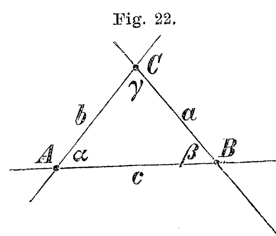
§ 10. **Dreieck und Dreiseit.**

a) Drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, und ihre Verbindungslinien grenzen einen ungeteilten Raum ab.

α) Drei Gerade, die nicht durch einen Punkt gehen, und ihre Schnittpunkte bestimmen die nämliche Figur, welche in a) betrachtet wurde.

Die in a) und α) entstandene Figur wird je nach ihrer Entstehungsweise Dreieck oder Dreiseit genannt (siehe Fig. 22). Ein Dreieck (Dreiseit) ist durch die Lage der Ecken (oder durch die Lage der Seiten) vollkommen bestimmt.

Fig. 22.



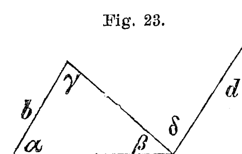
Anmerkung. Man sagt von Dreiecken, deren Ecken (und Seiten) sich entsprechen (z. B. von symmetrischen Dreiecken), sie seien „gleichen oder entgegengesetzten Sinnes", je nachdem dasselbe von den entsprechenden Winkeln gilt. (Vergleiche die Übungen § 2, 7 bis 12.)

§ 11. **Allgemeine Sätze über das Dreieck.**

a) Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt 180°.

Beweis. (Fig. 23.) Man ziehe durch den Scheitel eines Winkels β die Parallele zur gegenüberliegenden Seite b. Die Winkel $(\beta + \delta)$ und α sind als Ergänzungswinkel nach § 8d zusammen 180°. Ersetzt man in der Gleichung $\alpha + \beta + \delta = 180^0$ den Winkel δ durch den ihm gleichen Wechselwinkel γ (§ 8d), so erhält man $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

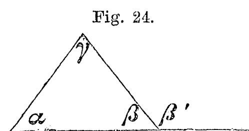
Fig. 23.



b) Ein Aufsenwinkel ist gleich der Summe der beiden innern Winkel, welche nicht seine Nebenwinkel sind.

Beweis. β' in Fig. 24 ist gleich $180^0 - \beta$ (§ 5b), und die Summe $\alpha + \gamma$ ist nach § 11a auch $180^0 - \beta$. Also ist $\beta' = \alpha + \gamma$.

Fig. 24.



Ein Dreieck kann lauter spitze Winkel haben (spitzwinkliges D.), aber nur einen rechten (rechtwinkliges D.) oder stumpfen Winkel (stumpfwinkliges D.). Den rechtwinkligen Dreiecken stellt man auch die übrigen als schiefwinklige gegenüber.

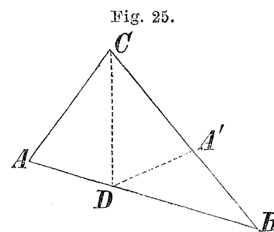
Fortsetzung. § 12.

a) In jedem Dreieck liegt der gröfseren Seite der gröfsere Winkel gegenüber.

α) In jedem Dreieck liegt dem gröfseren Winkel die gröfsere Seite gegenüber.

Beweise. (Fig. 25.) a) CB sei gröfser als CA. Man ziehe die Halbierungslinie des Winkels γ *) und klappe das Dreieck CDA um die Achse CD um. A fällt alsdann auf CB (§ 3a) und zwar zwischen C und B (Vorauss.) nach A'. Der Winkel α erscheint dann in seiner neuen Lage bei A' als Aufsenwinkel des Dreiecks DBA' und ist nach § 11b gröfser als Winkel β.

Fig. 25.



α) Der Winkel α*) sei gröfser als β. Man ziehe die Halbierungslinie CD von γ (Fig. 25). Alsdann ist $\sphericalangle BDC$ (er ist $\alpha + \frac{\gamma}{2}$ nach § 11b) gröfser als ADC (er ist $\beta + \frac{\gamma}{2}$). Bei dem Umklappen von Dreieck ACD um CD mufs daher DA in den Winkel CDB hineinfallen, so dafs die neue Lage von A notwendig zwischen C und B fällt. Hieraus folgt, dafs CA kleiner als CB ist.

Folgerungen. **b)** Gleichen Seiten (eines Dreiecks) liegen gleiche Winkel gegenüber.

β) Gleichen Winkeln (eines Dreiecks) liegen gleiche Seiten gegenüber.

Beweise. b) Wenn die Winkel ungleich wären, so müfsten auch nach Satz α) die Seiten ungleich sein.

β) Wenn die Seiten ungleich wären, so müfsten auch nach Satz a) die Winkel ungleich sein.

Anmerkung. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die-

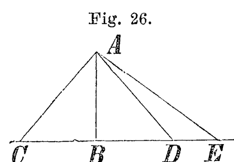
*) Die Bezeichnung von Stücken des Dreiecks siehe in Fig. 22.

jenige Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt (Hypotenuse) gröſser als die übrigen (Katheten). Entsprechendes gilt vom stumpfwinkligen Dreieck (Satz a).

c) 1) Unter allen Strecken, die man von einem Punkte nach einer Geraden ziehen kann, ist die Senkrechte die kürzeste (Entfernung des Punktes von der Geraden). 2) Zwei schiefe Strecken sind gleich, wenn ihre Endpunkte vom Fuſspunkte der Senkrechten gleiche Entfernung haben. 3) Von zwei schiefen Strecken ist diejenige die gröſsere, deren Endpunkt von dem Fuſspunkte der Senkrechten weiter absteht.

Beweis. (Fig. 26.) 1) Die schiefe Linie AC ist gröſser als die Senkrechte AB, weil sie im Dreieck ABC dem gröſsten Winkel gegenüber liegt. 2) Wenn die Punkte C und D von B gleichen Abstand haben, so entsprechen sie sich nach § 6b für die Achse AB symmetrisch. Dann sind aber auch die Strecken AC und AD entsprechend und deshalb gleich (§ 6c). 3) Wenn $BE > BD$, so ist der Winkel ADE als Auſsenwinkel des Dreiecks ABD gröſser als Winkel ABD, d. h. stumpf. Folglich ist $AE > AD$.

Fig. 26.



Viereck und Vierseit.

a) Erklärungen. Vier Punkte, von welchen nie 3 auf einer Geraden liegen, bilden die Ecken eines „vollständigen Vierecks", dessen Seiten

α) Erklärungen. Vier Gerade a, b, c, d, von welchen nie 3 durch einen Punkt gehen, bilden die Seites eines „vollständigen Vierseits", dessen

Fig. 27.

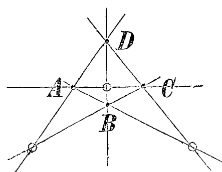


Fig. 28.

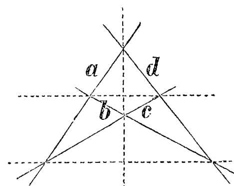


Fig. 29.

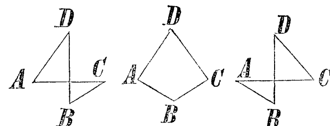
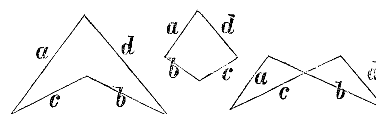


Fig. 30.



die 6 möglichen Verbindungslinien jener Punkte sind (Fig. 27).

Je zwei Seiten, welche sich nicht in einem Eckpunkte schneiden, wie AD und BC, heiſsen Gegenseiten. Der Schnittpunkt zweier Gegenseiten heiſst ein Nebeneck des vollständigen Vierecks.

Ein vollständiges Viereck hat 3 Paare von Gegenseiten und 3 Nebenecken.

Es giebt 3 Arten, von einem Eckpunkte A aus durch die Seiten des vollständigen Vierecks zu den übrigen Ecken und nach A zurück zu kommen.

Dadurch entstehen 3 „einfache Vierecke“ (Fig. 29). Seiten des mittlern unter ihnen werden die Strecken AB, BC, CD, DA genannt. Nur eines derselben schlieſst einen ungeteilten Raum ab, in den die Träger der Vierecksseiten nicht hineinreichen. Die Winkel dieses Vierecks sind hohl.

Ecken die 6 möglichen Schnittpunkte jener Geraden sind (Fig. 28).

Je zwei Ecken, welche nicht auf einer Seite liegen, wie (ab) und (cd), heiſsen Gegenecken. Die Verbindungslinie zweier Gegenecken heiſst eine Diagonale des vollständigen Vierseits.

Ein vollständiges Vierseit hat 3 Paare von Gegenecken und 3 Diagonalen.

Es giebt 3 Arten, von einer Seite a aus durch die Ecken des vollständigen Vierseits zu den übrigen Seiten und nach a zurück zu kommen.

Dadurch entstehen 3 „einfache Vierseite“ (Fig. 30). Eckpunkte des mittlern unter ihnen heiſsen die 4 Schnittpunkte (ab), (bc), (cd), (da). Nur eines derselben schlieſst einen ungeteilten Raum ein, in welchen die Seiten nicht hineinreichen. Die Winkel dieses Vierseits sind hohl.

Das einfache Viereck und das einfache Vierseit sind identische Figuren.

Einfache Vielecke. **§ 14.**

a) Erklärungen. Wenn man einen beliebigen Punkt mit einem zweiten, diesen mit einem dritten und so fort, durch geradlinige Strecken verbindet und zuletzt wieder zu dem ersten Punkte zurückkehrt, so entsteht ein einfaches Vieleck.

Ein n-Eck hat n Winkel und n Seiten. Die Nebenwinkel der Vieleckswinkel heiſsen Auſsenwinkel.

Die folgenden Sätze gelten nur für solche Vielecke, welche einen ungeteilten Raum abschlieſsen, in den die Träger der

Seiten nicht hineinreichen. Solche Vielecke haben lauter hohle Winkel. Ein Zuschauer durchläuft den Umring des Vielecks rechts oder links herum, je nachdem er die Fläche des Vielecks rechter oder linker Hand hat. Denkt man hierbei jede Seite in derjenigen Richtung verlängert, in welcher sie durchlaufen wird, so erhält man n Aufsenwinkel, welche man kurz als „die Aufsenwinkel des n-Ecks" bezeichnet. — Durch einen Eckpunkt des Vielecks gehen $n - 1$ Strecken, welche denselben mit den übrigen Ecken verbinden. Zwei derselben sind Seiten des Vielecks, die übrigen $n - 3$ werden Diagonalen genannt. Durch diese Diagonalen wird das n-Eck in $n - 2$ Dreiecke geteilt.

b) Die Summe der Winkel eines n-Ecks beträgt

$$(n - 2) \,.\, 180^0.$$

β) Die Summe der Aufsenwinkel eines n-Ecks beträgt 360^0.

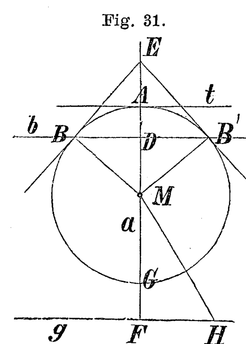
Beweise. b) Die Diagonalen eines Eckpunktes teilen das n-Eck in $(n - 2)$ Dreiecke. Die Winkel dieser Dreiecke bilden zusammen die n Winkel des n-Ecks und die Behauptung ergiebt sich deshalb aus § 11 a).

β) Die Aufsenwinkel müssen mit den innern Winkeln zusammen n mal 180^0 ausmachen. Man findet also die Summe der Aufsenwinkel, wenn man $(n - 2) \,.\, 180^0$ von $n \,.\, 180^0$ abzieht.

§ 15. **Der Kreis. Lagen einer Geraden gegen denselben.**

a) Erklärungen. Wenn eine Strecke r sich um einen Endpunkt M (Fig. 31) dreht, so beschreibt der andere Endpunkt B einen Kreis (Kreislinie), welcher die „Kreisfläche" einschliefst. Der Punkt M heifst Mittelpunkt des Kreises. Mit besonderen Benennungen werden noch belegt: Die Strecke, welche den Mittelpunkt M mit einem Kreispunkte verbindet (Radius $= r$), die Strecke, welche zwei Kreispunkte verbindet (Sehne), die gröfste Sehne im Kreis, nämlich die durch den Mittelpunkt gezogene (Durchmesser $= 2 \,.\, r$), eine Gerade, welche den Kreis in 2 Punkten schneidet (Sekante) und daher der Träger einer Sehne ist, ein durch Punkte begrenztes Stück der Kreislinie (Bogen),

Fig. 31.



ein von zwei Radien eingeschlossener Winkel (Mittelpunktswinkel, Centriwinkel).

b) Eine Gerade b kann drei verschiedene Lagen gegen den Kreis haben:

1) Wenn die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte kleiner als der Radius ist, so trifft sie den Kreis in zwei Punkten B und B'.
2) Wenn die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte gleich dem Radius ist, so hat die Gerade einen einzigen Punkt mit dem Kreise gemein (Berührungspunkt) und heiſst eine Tangente des Kreises.
3) Wenn die Entfernung der Geraden vom Mittelpunkte gröſser ist als der Radius, so trifft die Gerade den Kreis nicht.

Beweis. 1) Die Entfernung MD der Geraden b (Fig. 31) sei kleiner als der Radius. Ein Punkt P, welcher sich von D aus in der Richtung DB bewegt, entfernt sich fortwährend von M (§ 12c). Wenn seine Entfernung von D gleich dem Radius geworden ist, so ist sein Abstand von M gröſser als der Radius (§ 12, Anmerkung). Es muſs also schon vorher eine Lage des bewegten Punktes P gegeben haben (die Lage B), in welcher derselbe von M gerade um die Länge r (Radius) entfernt ist. — Ebenso beweist man, daſs auch auf der entgegengesetzten Richtung der Geraden b ein Schnittpunkt mit dem Kreise zu finden ist.

2) Die Entfernung MA der Geraden t (Fig. 31) sei gleich r. A liegt alsdann auf dem Kreise. Der Punkt P, welcher sich von A weg auf der Geraden t bewegt, entfernt sich von M und liegt daher jederzeit (die Anfangslage A ausgenommen) auſserhalb des Kreises. — Die Gerade t hat nur den Punkt A mit dem Kreise gemein.

3) Wenn man die Betrachtung 2) auf die Gerade g (Fig. 31) anwendet, deren Entfernung MF gröſser als r ist, so ergiebt die Behauptung in 3).

Folgerungen. Aus dem Satze b, 2 folgt:

c) Die im Endpunkte des Radius errichtete Senkrechte ist eine Tangente des Kreises.

Die Strecke MA in Fig. 31 hat die 3 Eigenschaften, daſs sie durch den Mittelpunkt des Kreises und durch den Berührungspunkt der Tangente t geht und auf dieser Tangente senkrecht steht. MA ist also sowohl die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Berührungspunkte, als auch die im Berührungs-

punkte auf die Tangente errichtete Senkrechte und die aus dem Mittelpunkte auf die Tangente gefällte Senkrechte. Daher die Sätze:

d) 1) Die im Berührungspunkt errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

2) Die aus dem Mittelpunkte gefällte Senkrechte geht durch den Berührungspunkt.

3) Die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Berührungspunkte verbindet, steht auf der Tangente senkrecht.

§ 16. **Symmetriesätze.**

BB' sei eine Sehne des Kreises (Fig. 31) und AF der dazu senkrechte Durchmesser. Die halbe Umdrehung der Figur um AF bringt den Punkt B in die Verlängerung von BD über B hinaus und B ist auch in der neuen Lage (wie auch während der Bewegung) ein Kreispunkt. Daraus folgt, dafs B in den zweiten Endpunkt B' der Sehne BB' gelangt. Die Tangente BE in B kommt in die Lage $B'E$ und ist auch in der neuen Lage (wie auch während der Bewegung) Tangente des Kreises (in B'). Der Radius MB kommt nach MB' und ist wieder ein Radius des Kreises. Daraus folgt:

a) Der Kreis ist symmetrisch in Bezug auf jeden Durchmesser als Achse. Es entsprechen sich die Endpunkte jeder zum Durchmesser senkrechten Sehne, die Tangenten in diesen Endpunkten und die Radien nach diesen Endpunkten.

Die Achse enthält den Mittelpunkt und den Schnittpunkt der Tangenten; sie ist die Halbierungslinie des Tangentenwinkels und des Mittelpunktswinkels (§ 6), sowie die Mittelsenkrechte von BB'. Daher folgen die Sätze:

b) 1) Die Mittelsenkrechte der Sehne geht durch den Mittelpunkt etc.

2) Die Halbierungslinie des Tangentenwinkels geht durch den Mittelpunkt etc.

3) Die Halbierungslinie eines Mittelpunktswinkels steht auf der zugehörigen Sehne senkrecht und halbiert dieselbe.

4) Die Gerade, welche den Mittelpunkt mit dem Scheitel eines Tangentenwinkels verbindet, halbiert die zugehörige Berührungssehne senkrecht etc.

c) Die Tangentenabschnitte, welche von dem Schnittpunkte zweier Tangenten bis zum Kreise reichen, sind gleich grofs.

Anmerkung. Wenn die Gerade b (Fig. 31) sich parallel mit der anfänglichen Lage bewegt, bis sie mit t zusammenfällt, so fallen die Punkte B und B' beide nach A. — Die Tangente ist als eine Gerade anzusehen, welche den Kreis in 2 zusammenfallenden Punkten trifft.

Zwei Kreise. § 17.

a) Wenn die Mittelpunkte zweier Kreise zusammenfallen, so heifsen die Kreise koncentrisch.

Wenn solche Kreise auch gleiche Radien haben, so fallen sie zusammen; denn sie werden durch Drehung der nämlichen Strecke um denselben Punkt beschrieben.

b) Wenn die Mittelpunkte zweier Kreise nicht zusammenfallen, so heifst die Verbindungslinie dieser Mittelpunkte die Centrale der beiden Kreise. Wenn alsdann die Kreise einander treffen, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Die Kreise haben einen Punkt aufserhalb der Centralen gemeinsam. Alsdann haben sie noch einen zweiten Punkt gemeinsam und die Centrale ist die Mittelsenkrechte der gemeinsamen Sehne.

Fig. 32.

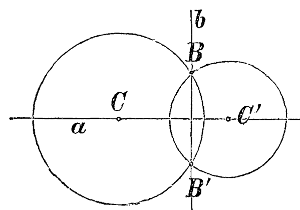
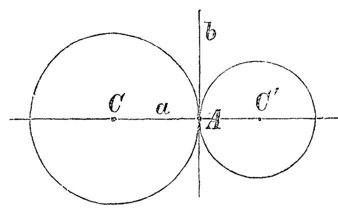


Fig. 33.



2) Wenn die Kreise einen Punkt der Centralen gemein haben, so haben sie in diesem Punkte eine gemeinsame Tangente, welche auf der Centralen senkrecht steht (Berührung von Kreisen).

In beiden Fällen haben die Kreise keinen weitern Punkt gemein (ohne zusammenzufallen).

Beweis. 1) Nach § 16 deckt die Figur 32 nach dem Umklappen um die Achse a ihre frühere Lage. Dann ist aber der gemeinsame Punkt B beider Kreise nach dem für a entsprechenden Punkte B' gekommen.

2) Wenn die beiden Kreise den Punkt A (Fig. 33 oder 34) der Centralen gemeinsam haben, so ist A der gemeinsame Endpunkt zweier Radien und die in A auf der Centralen errichtete

Senkrechte ist zugleich Tangente beider Kreise. Der Punkt A entspricht sich nun selbst für die Centrale a.

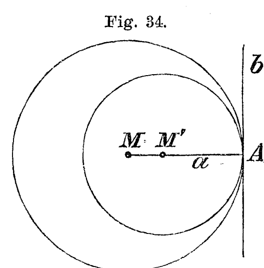


Fig. 34.

Die Kreise können in beiden Fällen keinen weitern Punkt D gemeinsam haben; sonst müfsten die Mittelpunkte auch auf der Geraden g liegen, welche die gemeinsame Sehne BD oder AD senkrecht halbiert. Die Mittelpunkte der Kreise würden also beide in dem Schnittpunkte der Geraden a und g zusammenfallen, was der Voraussetzung in b) widerspricht.

c) Die möglichen Lagen zweier Kreise überhaupt sind die folgenden:

1) Die Kreise schliefsen einander aus (Taf. I, Fig. 15). — Die Centrale ist gröfser als die Summe der Radien (um das Stück AB).
2) Die Kreise berühren einander von aufsen (Fig. 33). — Die Centrale ist gleich der Summe der Radien.
3) Der gröfsere Kreis schliefst den kleineren ein (Taf. I, Fig. 14). Die Centrale ist kleiner als die Differenz der Radien (um das Stück AB).
4) Die Kreise berühren einander von innen (Fig. 34). — Die Centrale ist gleich der Differenz der Radien.
5) Die Kreise schneiden einander. — Dieser Fall entsteht, wenn in Fig. 33 die Centrale kleiner oder wenn sie in Fig. 34 gröfser wird. — Die Centrale ist also kleiner als die Summe der Radien, aber doch noch gröfser als ihre Differenz.

§ 18. Begriff und Anwendung der geometrischen Örter.

a) Alle Punkte der Ebene, welche einer Bedingung genügen, bilden eine Figur, welche ein geometrischer Ort genannt wird.

Beispiel. Alle Punkte der Ebene, welche von dem Punkte M die Entfernung r haben, sind Endpunkte einer Strecke von der Länge r, deren Anfangspunkt der Punkt M ist. Durch die Drehung dieser Strecke um M entsteht nach § 15a ein Kreis:

b) Der geometrische Ort für diejenigen Punkte, welche von M den Abstand r haben, ist der Kreis, welcher mit dem Radius r um M gezogen ist.

Die Angabe dieses Ortes ist vollständig; denn aufser den Punkten jenes Kreises giebt es keine andern Punkte der Ebene, welche von M die Entfernung r hätten, oder:

1) Alle Punkte, welche von M die Entfernung r haben, liegen auf dem Kreise.

In der Angabe des Ortes sind auch keine überflüssigen Linien oder Linienteile genannt; denn:

2) Alle Punkte des Kreises haben von M die Entfernung r.

In diesen beiden Behauptungen besteht der Inhalt des in b) ausgesprochenen Ortssatzes. Diese Behauptungen müssen im allgemeinen bewiesen werden (siehe § 20). In § 18b sind diese Beweise in der Beschreibung des Ortes durch die Bewegung einer Strecke enthalten.

Wenn aufgegeben ist, über einer Strecke $AB = c$ als Seite ein Dreieck zu zeichnen, von welchem der Winkel α*) gegeben ist, so mufs 1) der Eckpunkt C auf dem freien Schenkel des in A angetragenen Winkels α liegen. 2) Es kann alsdann jeder Punkt dieses freien Schenkels als Spitze des Dreiecks angenommeu werden. Nach dem Vorigen kann man sagen:

Ein Ort für C ist der freie Schenkel des in A angetragenen Winkels α.

Ist nun als drittes Stück des Dreiecks z. B. die Seite a gegeben, so folgt auch aus dem Vorhergehenden:

Ein zweiter Ort für C ist der mit a um B beschriebene Kreis.

Die Spitze C mufs alsdann auf beiden Örtern zugleich liegen. Es giebt so viele Lagen für C und daher so viele Dreiecke, als gemeinsame Punkte beider Örter bestehen.

c) Ein Punkt, der zwei Bedingungen zugleich genügt, wird durch zwei geometrische Örter gefunden. Es giebt so viele Lagen für diesen Punkt (so viele Lösungen der Aufgabe), als gemeinsame Punkte beider Orter bestehen.

d) Wenn über einer Strecke $AB = c$ mit noch 2 gegebenen Stücken nur ein einziges Dreieck möglich ist, so müssen 2 Dreiecke, welche mit diesen 3 Stücken an verschiedenen Orten gezeichnet werden, zusammenfallen, sobald sie über dieselbe Gerade $AB = c$ gestellt werden.

Wäre dieses nicht der Fall, so gäbe es über AB 2 Dreiecke, welche der Aufgabe genügen, was der Annahme widerspricht.

*) Der Bezeichnung in Fig. 22 zufolge soll der Winkel α des Dreiecks den Punkt A zum Scheitel haben.

e) Dreiecke heifsen kongruent, wenn sie so gelegt werden können, dafs sie einander decken.

f) In kongruenten Dreiecken sind entsprechende Seiten und Winkel gleich.

Entsprechende Stücke nennt man nämlich diejenigen, welche bei der Deckung der Dreiecke auf einander fallen. Diejenigen Winkel (Seiten), welche entsprechenden Seiten (Winkeln) gegenüberliegen, sind ebenfalls entsprechend.

§ 19. Die 4 Fundamentalkonstruktionen des Dreiecks. — Die 4 Kongruenzsätze.

a) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch die beiden andern Seiten a und b gegeben sind.

Analyse. Man hat für den Punkt C zwei Örter: den Kreis, der mit a um B beschrieben ist und denjenigen, welcher mit b um A beschrieben ist. Die Kreise können über AB höchstens einen Punkt gemeinsam haben — man erhält jedenfalls nicht mehr als ein Dreieck, welches der Aufgabe genügt. Die Konstruktion ist leicht auszusprechen. Determination: Nur wenn die Bedingungen $c < a + b$ und $c > a - b$ erfüllt sind (§ 17c), erhält man 2 Schnittpunkte der Kreise, von welchen der eine über AC gelegene für C gewählt werden darf. Wenn $c = a + b$ oder $c = a - b$, so fällt C auf die Gerade AB (Grenzfälle), so dafs kein Dreieck entsteht. Wenn $c > a + b$ oder $c < a - b$, so treffen die Kreise einander gar nicht und man erhält ebenfalls kein Dreieck.

Folgerungen: 1) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie die 3 Seiten entsprechend gleich haben.

2) In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten gröfser als die dritte und die Differenz zweier Seiten ist kleiner als die dritte.

b) Aufgabe. In dem Punkte M den gegebenen Winkel ABC an die Gerade MN anzutragen (Fig. 16 u. 17 auf Taf. I).

Beschreibe mit gleichen Radien um Scheitel B des gegebenen Winkels und den gegebenen Punkt M Kreisbogen. Mache $PQ = FG$, so folgt aus der Kongruenz der Dreiecke FBG und PMQ (nach § 18f), dafs $\sphericalangle ABC = PMN$.

c) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch die Seite b und der eingeschlossene Winkel α gegeben sind.

Analyse. Man hat für C zwei Örter, nämlich den freien

Schenkel des in A angetragenen Winkels α und den mit b um A beschriebenen Kreis. Da beide nur einen Punkt gemein haben können, so giebt es höchstens ein Dreieck, welches der Aufgabe genügt. Die Konstruktion ist mit Hilfe von b) auszuführen. Determination: Wenn $\alpha < 180^0$, so giebt es immer eine einzige Lösung.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel entsprechend gleich haben.

d) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch die Seite a und der ihr gegenüberliegende Winkel α gegeben sind.

Analyse. Man hat als Örter für den Punkt C den freien Schenkel des in A angetragenen Winkels α und den mit a um B beschriebenen Kreis. Beide Örter können höchstens 2 Punkte gemeinsam haben, so daſs es höchstens 2 Lösungen giebt. Die Konstruktion ist leicht anzugeben. Determination: Der Kreis trifft den Träger des freien Schenkels in keinem Punkte oder in einem Punkte oder in 2 Punkten, je nachdem der Radius a kleiner, gleich oder gröſser ist, als die Entfernung des freien Schenkels von α vom Punkte B. Von den zwei Punkten, welche im dritten Falle in Betracht kommen, liegt aber nur einer auf dem freien Schenkel von α (der andere auf dem Schenkel seines Nebenwinkels), sobald $a > c$ (Taf. I, Fig. 19). In diesem Falle erhält man nur eine Lösung.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den der gröſseren gegenüberliegenden Winkel entsprechend gleich haben.

e) Über der Seite $AB = c$ ein Dreieck zu konstruieren, wenn noch 2 Winkel gegeben sind.

Wenn 2 Winkel gegeben sind, so kann man den dritten Winkel durch § 11a finden. Man darf also annehmen, daſs die beiden anliegenden Winkel α und β bekannt seien. Nun hat man als Örter für C die freien Schenkel der in A und B angetragenen Winkel α und β. Dieselben haben nur einen Punkt gemeinsam, so daſs man nur eine Lösung erhält.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und 2 Winkel entsprechend gleich haben.

Geometrische Örter. **§ 20.**

a) Der geometrische Ort für diejenigen Punkte, welche von

α) Der geometrische Ort für diejenigen Punkte, welche

2 festen Punkten gleiche Entfernung haben (für die Mittelpunkte der Kreise, welche durch diese Punkte gehen), ist die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie.

von den Schenkeln eines Winkels gleiche Entfernung haben (für die Mittelpunkte der Kreise, welche die Schenkel des Winkels berühren), ist die Halbierungslinie des Winkels.

Fig. 35.

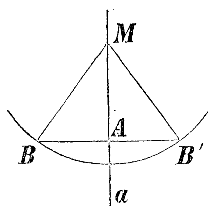
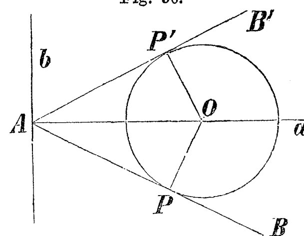


Fig. 36.



Beweis zu a. (Fig. 35.) 1) Wenn $MB = MB'$, oder wenn M der Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch B und B' geht, so mufs auch die Mittelsenkrechte der Sehne BB' durch M gehen (§ 16).

2) Wenn M auf der Mittelsenkrechten a von BB' gelegen ist, so entsprechen sich die Strecken MB und MB' für die Achse a. Folglich ist $MB = MB'$ und man kann mit dem Radius $MB = MB'$ einen Kreis um M ziehen, der durch B und B' geht.

Beweis zu β. (Fig. 36.) 1) Wenn die senkrechten Entfernungen OP und OP' gleich sind, oder wenn O der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die Winkelschenkel in P und P' berührt, so mufs die Halbierungslinie a des Tangentenwinkels BAB' durch O gehen (§ 16).

2) Wenn O auf der Halbierungslinie des Winkels BAB' gelegen ist und die Winkel bei P und P' recht sind, so haben die Dreiecke OAP und OAP' alle Winkel entsprechend gleich. Dann entsprechen sich die Geraden AP und AP', OP und OP' für die Achse a (§ 6). Folglich sind auch die Schnittpunkte P und P', sowie die Strecken OP und OP' entsprechend und man hat nach § 6c $OP = OP'$. O ist dann der Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius $OP = OP'$, der die Schenkel in P und P' berührt.

b) Fragt man nach den Punkten, welche von zwei konvergenten Geraden gleiche Entfernung haben*), oder nach

*) Die Senkrechten brauchen alsdann nicht auf den Schenkeln eines bestimmten unter den 4 gebildeten Winkeln aufzutreffen.

den Mittelpunkten von Kreisen, welche diese Geraden berühren, so besteht der geometrische Ort derselben aus zwei zu einander senkrechten Geraden, in welche die Halbierungslinien der 4 gebildeten Winkel fallen.

c) Wenn in Fig. 35 die Punkte B und B' nach dem Punkte A zusammenfallen, oder wenn in Fig. 36 die Geraden AB und AB' beide in die auf a senkrechte Gerade b zusammenfallen, so erhält man den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kreisen, welche die Gerade b in A berühren. Dieser Ort ist die in A errichtete Senkrechte a. (Vergleiche § 15 d.)

Fortsetzung. **§ 21.**

a) Es giebt nur einen Punkt, welcher von den Ecken eines Dreiecks ABC gleiche Entfernung hat oder der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher durch die Punkte A, B, C geht. In diesem Punkte schneiden sich die Mittelsenkrechten aller Dreiecksseiten.

α) Es giebt nur einen Punkt (im Innern eines Dreiecks), welcher von den Seiten gleiche Entfernung hat oder Mittelpunkt eines Kreises ist, der die 3 Seiten berührt. In diesem Punkte schneiden sich die Halbierungslinien der drei Winkel.

Beweis zu a). (Fig. 37.) Man ziehe die Mittelsenkrechten m' und m'' der Seiten a und b, welche sich in M schneiden. Weil

Fig. 37.

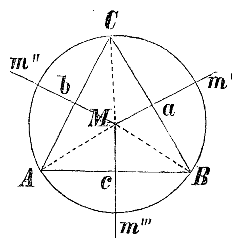
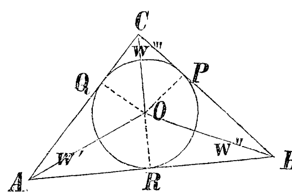


Fig. 38.

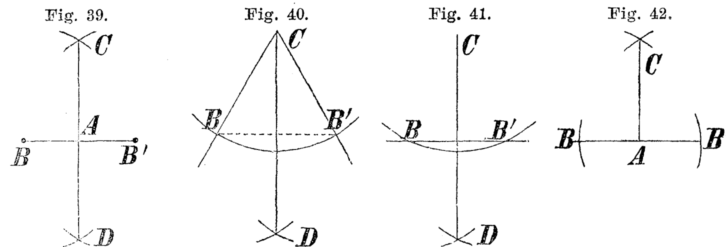


M auf der Mittelsenkrechten m' liegt, ist $MB = MC$; weil M auch auf m'' liegt, ist $MC = MA$ (§ 20a). Daraus ergiebt sich, dafs $MA = MB = MC$, oder dafs M von den Ecken gleiche Entfernung hat und Mittelpunkt eines Kreises ist, der durch A, B, C geht. Auch die Mittelsenkrechte von c mufs nach § 20a oder § 10b durch den Punkt M gehen. Ein zweiter Punkt derart ist unmöglich, denn auch er müfste auf den Mittelsenk-

rechten m' und m'' (auch m''') liegen und mit dem Schnittpunkte zusammenfallen.

Beweis zu α. (Fig. 38.) Man ziehe die Halbierungslinien w' und w'' der Winkel α und β. Dieselben schneiden sich in O. Weil O auf w' liegt, so ist $OQ = OR$; weil O auf w'' liegt, so ist $OR = OP$ (§ 20α). Daraus ergiebt sich, daſs $OP = OQ = OR$ oder daſs O der Mittelpunkt eines Kreises ist, welcher die 3 Seiten berührt. Auch die Halbierungslinie w''' des dritten Winkels muſs nach § 20α oder § 16b durch den Punkt O gehen. Ein zweiter Punkt derart ist unmöglich, denn auch er müſste nach § 20α auf w' und w'' liegen und mit dem Schnittpunkte O zusammenfallen.

b) Fragt man nach den Punkten, welche von den Trägern der Seiten gleiche Entfernung haben*), oder nach den Mittelpunkten von Kreisen, welche die Träger der Seiten berühren, so ergeben sich 4 Punkte. Einer derselben liegt im Innern des Dreiecks und ist der Schnittpunkt der Geraden, welche die Innenwinkel halbieren. Die drei übrigen Punkte liegen in den Feldern, welche den Dreiecksseiten anliegen, und in jedem derselben schneidet sich die Halbierungslinie eines Innenwinkels mit den Halbierungslinien der Auſsenwinkel an den übrigen Ecken.



§ 22. **Aufgaben.**

a) Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe um die Endpunkte B und B' der Strecke (Fig. 39) als Mittelpunkte Kreise von gleichem Radius, welche sich schneiden. Die Schnittpunkte C und D liegen auf der gesuchten Senkrechten und bestimmen dieselbe.

Beweis. Die Schnittpunkte C und D liegen auf der Mittelsenkrechten von BB', weil sie von B und B' gleiche Entfernung (den Radius der Kreise) haben (§ 20a).

*) Die Senkrechten brauchen alsdann nicht die Seiten selbst, sondern nur ihre Träger zu treffen.

α) Die Halbierungslinie eines Winkels zu konstruieren.

Auflösung. Um den Winkel BCB' (Fig. 40) zu halbieren, ziehe man mit beliebigem Radius um C einen Kreisbogen BB'. Mit dem gleichen Radius ziehe man um B und B' Kreise, welche sich in C und einem Punkte D der gesuchten Halbierungslinie schneiden.

Beweis. Nach a) ist CD die Mittelsenkrechte der Strecke BB'. Die Geraden CB und CB' entsprechen sich also symmetrisch für die Achse CD, und CD halbiert deshalb den Winkel BCB'.

b) Von einem gegebenen Punkte aufserhalb einer Geraden die Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Man ziehe um den gegebenen Punkt C (Fig. 41) einen Kreis, welcher die Gerade in B und B' schneidet. Mit dem nämlichen Radius ziehe man um B und B' zwei Kreise, welche sich in C und einem zweiten Punkte D der gesuchten Senkrechten schneiden.

Beweis. Nach a) ist CD die Mittelsenkrechte von BB'; da dieselbe durch C geht, so ist die Aufgabe gelöst.

β) In einem gegebenen Punkte innerhalb einer Geraden eine Senkrechte auf dieselbe zu errichten.

Auflösung. Ist A (Fig. 42) der gegebene Punkt, so schneide man mit dem Zirkel auf beiden Seiten gleiche Stücke AB und AB' ab. Mit einem Radius, welcher gröfser ist als AB, ziehe man um B und B' Kreise. Ihre Schnittpunkte liegen auf der gesuchten Senkrechten.

Beweis. Die Schnittpunkte liegen auf der Mittelsenkrechten von BB'. Da diese durch A geht, so ist die Aufgabe gelöst. Man kann übrigens durch die Kenntnis von A den einen Schnittpunkt der Kreise sparen.

Winkel und Bogen. § 23.

a) Wenn man der Kreislinie eine beliebige Drehung um den Mittelpunkt giebt, so deckt sie ihre frühere Lage.

Beweis. Der Kreispunkt bleibt bei dieser Drehung Endpunkt einer Strecke, die sich um den Anfangspunkt dreht.

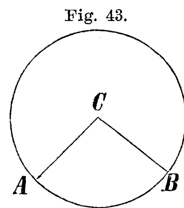
b) Folgerung. Man kann daher Bogen desselben Kreises auf einander abtragen wie geradlinige Strecken. Man kann die Summe oder Differenz von zwei Bogen bilden, zusehen, ob sie gleich sind (Deckung) oder ob der eine gröfser ist als der andere.

c) Zu gleichen Bogen gehören gleiche Mittelpunktswinkel und umgekehrt.

Beweis. 1) Man drehe den einen Bogen (Mittelpunktswinkel) um den Mittelpunkt, bis er den andern deckt. Dann decken sich auch die zugehörigen Mittelpunktswinkel (Bogen).

d) Ein Bogen, welcher 360 mal in der Kreislinie enthalten ist, heifst (Bogen-) Grad (^{0}). Ein Grad wird in 60 (Bogen-) Minuten ($'$) und diese in 60 (Bogen-)Sekunden ($''$) geteilt.

Fig. 43.



e) Folgerung. Ein Bogen hat ebensoviele Bogengrade, als der zugehörige Mittelpunktswinkel Winkelgrade enthält.

Wenn man mit ACB (Fig. 43) die Mafszahl (§ 56) des Winkels ACB und mit $\widehat{AB}$ die Mafszahl des Bogens AB, beide in Graden ausgedrückt, bezeichnet, so kann man setzen

$$\sphericalangle ACB = \widehat{AB}.$$

§ 24. Peripheriewinkel, Sehnen- und Sekantenwinkel.

a) Erklärungen. Unter den Winkeln, deren Schenkel einen Kreis treffen, unterscheidet man:

1) Winkel, deren Scheitel auf dem Kreise liegen (Peripheriewinkel).
2) Winkel, deren Scheitel im Innern der Kreisfläche liegen (Sehnenwinkel mit dem besondern Fall der Mittelpunktswinkel).
3) Winkel, deren Scheitel aufserhalb der Kreisfläche liegen (Sekantenwinkel mit dem besondern Fall der Tangentenwinkel).

Fig. 44.

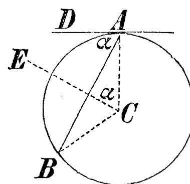


Fig. 45.

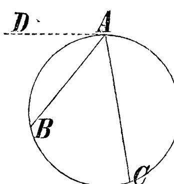


Fig. 46.

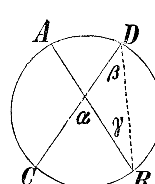
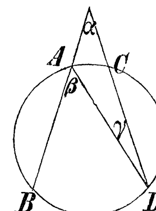


Fig. 47.



b) Der Peripheriewinkel hat halb so viel Grade, als der eingeschlossene Kreisbogen.

Beweis. 1) Der Peripheriewinkel ist von einer Tangente (AD in Fig. 44) und einer Sehne AB gebildet. Man ziehe die Halbierungslinie CE des Mittelpunktswinkels ACB, welche nach

§ 16a, 3 auf der Sehne AB senkrecht steht. Alsdann sind die Winkel, welche mit α bezeichnet sind, einander gleich, weil ihre Schenkel paarweise senkrecht auf einander stehen (§ 5e). Man liest nun nach § 23e ab: $\alpha = \widehat{AE} = \frac{1}{2}\widehat{AB}$ (§ 23e), worin der Beweis liegt.

2) Der Peripheriewinkel ist von zwei Sehnen AB und AC gebildet (Fig. 45). Der Winkel BAC erscheint als Differenz der Sehnentangentenwinkel DAC und DAB. Nun hat man nach 1): $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ und $\sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\widehat{AB}$. Durch Subtraktion ergiebt sich: $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\widehat{BC}$.

c) Der Sehnenwinkel hat halb so viel Grade, als die Summe der Bogen, die von ihm und seinem Scheitelwinkel eingeschlossen sind.

Beweis. (Fig. 46.) $\alpha = \beta + \gamma$ (§ 11b). Wenn man hier $\beta = \frac{1}{2}\widehat{CB}$ und $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{AD}$ einsetzt, so ergiebt sich die Behauptung.

d) Der Sekantenwinkel hat halb so viel Grade, als die Differenz der Bogen, die von seinen Schenkeln eingeschlossen sind.

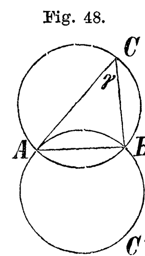
Beweis. (Fig. 47.) $\beta = \alpha + \gamma$ (§ 11b), oder $\alpha = \beta - \gamma$. Wenn man hier $\beta = \frac{1}{2}\widehat{BD}$ und $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{AC}$ einsetzt, so ergiebt sich die Behauptung.

Geometrischer Ort. — Aufgaben. § 25.

a) Der geometrische Ort für die Spitzen aller Winkel von gegebener Gröfse, deren Schenkel durch A und B gehen, besteht aus zwei Kreisbogen, die ebenfalls durch diese Punkte gehen und sich für die Linie AB symmetrisch entsprechen.

Beweis. γ sei der gegebene Winkel (Fig. 48). So lange C sich auf dem Bogen ACB bewegt, bleibt der Winkel ACB von derselben Gröfse (§ 24b). Wenn aber C aus der Kreislinie heraustritt, so wird Winkel ACB gröfser oder kleiner, weil er als Sehnenwinkel oder Sekantenwinkel halb so grofs ist, als die Summe oder Differenz zweier Bogen, deren einer immer der Bogen AB sein wird. Durch Umklappen um die Achse AB erhält man den andern Teil des geometrischen Ortes, den Bogen $AC'B$.

Fig. 48.



b) Wird der Winkel γ recht, so stellt der Bogen ACB

einen Halbkreis vor und die beiden zu AB symmetrischen Bogen machen einen ganzen Kreis aus (Ort für die Spitzen der rechtwinkligen Dreiecke mit der Hypotenuse AB).

Fig. 49.

c) Aufgabe. Von einem Punkte A (Fig. 49) aufserhalb eines Kreises Tangenten an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Die Berührungspunkte sind die Durchschnittspunkte des gegebenen Kreises mit einem andern, der über AC als Durchmesser errichtet ist.

d) Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, welcher über einer Sehne (BD Fig. 49) einen gegebenen Winkel β als Peripheriewinkel fafst.

Auflösung. Trage den Winkel β an den einen Endpunkt B der Sehne an und konstruiere einen Kreis, welcher durch B und D geht und den Schenkel BA in B berührt. Um den Mittelpunkt dieses Kreises zu finden, hat man die in B auf die Tangente BA errichtete Senkrechte mit der Mittelsenkrechten von BD in C zu schneiden (§ 15d, 1 und 16b, 1).

III. Abschnitt.

Die besonderen Vielecke.

§ 26. Das gleichschenklige Dreieck.

b) Ein Dreieck, welches zwei gleiche Seiten hat (gleichschenkliges Dreieck) ist symmetrisch für eine Achse, mit welcher folgende Transversalen zusammenfallen:

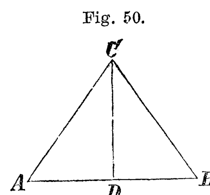
1) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze*).
2) Die Mittelsenkrechte der Grundlinie**).
3) Die durch die Spitze gezogene Höhe.
4) Die durch die Spitze gezogene Mittellinie.

Beweis. CD (Fig. 50) sei die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze. Nach § 3a entsprechen sich die Schenkel CA und CB für die Achse CD. Ebenso entsprechen sich nach § 3a die Punkte A und B, welche von C gleichen Abstand haben, für die Achse CD. Nun ist 1) CD als die Halbierungs-

*) Spitze nennt man den gemeinsamen Punkt der gleichen Seiten.
**) Grundlinie heifst die der Spitze gegenüberliegende Seite.

linie des Winkels ACB gezogen; 2) ist CD nach § 6a die Mittelsenkrechte von AB; 3) ist CD die durch C gezogene Höhe, weil (nach 2) die Winkel bei D recht sind; 4) ist CD die durch die Spitze gezogene Mittellinie, weil (nach 2) D die Mitte von AB ist.

Fig. 50.



Anmerkung. Die Dreiecke ADC und BDC entsprechen sich symmetrisch für die Achse CD, weil ihre Eckpunkte paarweise entsprechend sind (C und D entsprechen sich selbst). Die Dreiecke verwechseln ihre Lage durch das Umklappen.

b) Wenn die 4 Transversalen zusammenfallen, so kommen einer jeden die Eigenschaften der übrigen zu:

1) Die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze halbiert die Grundlinie senkrecht.
2) Die Mittelsenkrechte der Grundlinie geht durch die Spitze und halbiert den Winkel daselbst.
3) Die aus der Spitze auf die Grundlinie gefällte Senkrechte halbiert die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.
4) Die von der Spitze nach der Mitte der Grundlinie gezogene Gerade halbiert den Winkel an der Spitze und steht senkrecht auf der Grundlinie.

Das symmetrische Vierseit (Deltoïd). **§ 27.**

a) Wenn ein Viereck zwei Paare gleicher Nachbarseiten hat (Deltoïd)*), so ist es symmetrisch für eine Achse, mit welcher folgende Linien zusammenfallen:

1) Die Halbierungslinien der Winkel, welche von gleichen Seiten eingeschlossen sind.
2) Die Diagonale, welche die Scheitel dieser Winkel verbindet (Längendiagonale).
3) Die Mittelsenkrechte der zweiten Diagonale (Querdiagonale).

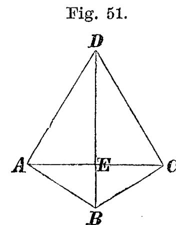
Beweis. Die Querdiagonale AC, Fig. 51, bildet mit den Seiten des Deltoïds zwei gleichschenklige Dreiecke, deren gemeinsame Grundlinie sie ist. Die Mittelsenkrechte von AC geht also durch die Spitzen B und D dieser Dreiecke (§ 26b, 2). Für diese Achse BD entsprechen die Ecken B und D sich selbst, während A und C einander zugeordnet sind (§ 6b).

---

*) Deltoïde mit erhabenen Winkeln sind nicht ausgeschlossen.

Daher entsprechen sich auch die Seiten DA und DC, BA und BC. 1) Die Symmetrieachse fällt nach § 6 α mit den Halbierungslinien der Winkel bei B und D zusammen. 2) Die Achse geht nach dem vorher Gesagten durch B und D, stellt also die Längendiagonale vor, und ist 3) ebenfalls nach dem Vorigen die Mittelsenkrechte von AC.

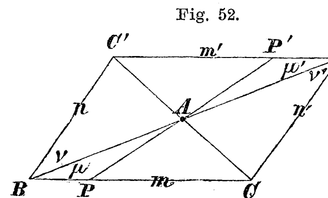
Fig. 51.



Anmerkung. Die Dreiecke ABD und CBD entsprechen sich, weil die Ecken A, B, D des ersten den Ecken C, B, D des zweiten entsprechen.

§ 28. Konstruktion von Vierecken.

Fig. 52.



a) BC und BC' seien zwei Seiten eines Vierecks (CC' eine Diagonale desselben). Man soll das Viereck konstruieren, wenn nacheinander folgende Bedingungen gegeben sind:

1) Je zwei gegenüberliegende Seiten sollen parallel sein. $BC \parallel C'B'$, $BC' \parallel CB'$.
2) Je zwei gegenüberliegende Seiten sollen gleich sein. $m = m'$, $n = n'$.
3) Je zwei gegenüberliegende Winkel sollen gleich sein. $\sphericalangle CBC' = CB'C'$, $\sphericalangle BCB' = BC'B'$.
4) Zwei gegenüberliegende Seiten sollen gleich und parallel sein. $BC \parallel B'C'$ und $m = m'$.
5) Die Diagonalen sollen einander halbieren. $BA = AB'$, $CA = AC'$.

Auflösungen:

1) Ziehe durch C' die Parallele zu BC und durch C die Parallele zu BC'. Man erhält nur eine einzige Lage für den vierten Eckpunkt und dadurch nur ein einziges Viereck.
2) Ziehe um C' einen Kreis mit m' und um C einen Kreis mit n'. Die Kreise haben zwar zwei gemeinsame Punkte; aber man darf von denselben nur denjenigen wählen, welcher nicht mit B auf derselben Seite von CC' liegt. Man erhält also ebenfalls nur ein einziges Viereck.
3) Wenn je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, so betragen zwei an derselben Seite anliegende Winkel die Hälfte der Summe aller vier Winkel oder 180^0. Dadurch

kann man aus dem Winkel bei B die Winkel bei C und C' finden. Durch Antragen derselben erhält man zwei Örter für B' und dadurch eine einzige Lage für diesen vierten Eckpunkt. — Man erhält nur ein Viereck.

4) Ziehe durch C' die Parallele zu BC und trage auf ihr die Länge m ab. — Man erhält nur ein Viereck.

5) Die Mitte A von CC' mufs auch die Mitte der zweiten Diagonale sein. Der vierte Eckpunkt B' liegt also auf der Verlängerung von BA so, dafs $AB' = AB$. Man erhält nur ein Viereck.

b) Erklärung. Ein Viereck, in welchem je 2 gegenüberliegende Seiten parallel sind (vergleiche die erste Konstruktion) heifst ein Parallelogramm.

c) Folgerung aus 1): Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Sätze über das Parallelogramm. **§ 29.**

Man gebe dem fünften der in § 28 konstruierten Vierecke eine halbe Umdrehung um den Punkt A. Jeder Eckpunkt vertauscht dadurch seine Lage mit dem gegenüberliegenden. Dadurch vertauscht auch jede Seite ihre Lage mit der gegenüberliegenden Seite:

Die gegenüberliegenden Seiten sind einander gleich.

Jede der Diagonalen deckt aber auch ihre eigene frühere Lage, sodafs die Wechselwinkel μ und μ' sowie ν und ν' ihre Lagen vertauschen. Diese Wechselwinkel μ und μ' sowie ν und ν' sind gleich und:

Die gegenüberliegenden Seiten sind parallel.

Ferner folgt aus dem Bisherigen:

Die Seiten BC und $B'C'$ sind gleich und parallel.

Da die gegenüberliegenden Seiten ihre Lage vertauschen, so vertauschen auch die Viereckswinkel bei B und B' sowie diejenigen bei C und C' ihre Lage:

Die gegenüberliegenden Winkel sind gleich.

Das fünfte Viereck erfüllt also die Bedingungen, welche für die Konstruktion der vier andern Vierecke gegeben sind. Da aber jedes dieser Vierecke nur in einem Exemplare vorhanden ist, so deckt das fünfte Viereck die vier andern.

Da die fünf Vierecke in § 28 einander decken, so kann man jedem derselben die Eigenschaften der andern zuschreiben. Daraus folgen die Sätze:

a) In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich; die Diagonalen halbieren einander.

b) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn in ihm:
1) Je zwei gegenüberliegende Seiten gleich sind.
2) Zwei gegenüberliegende Seiten gleich und parallel sind.
3) Je zwei gegenüberliegende Winkel gleich sind.
4) Die Diagonalen einander halbieren.

Das Resultat der halben Umdrehung des Vierecks läfst sich auch in dem Satze aussprechen:

c) Das Parallelogramm ist symmetrisch für den Schnittpunkt der Diagonalen. Jede durch A gezogene Gerade PP' teilt das Parallelogramm in zwei einander entsprechende Vierecke (bezüglich „Dreiecke"). Eine solche Gerade PP' wird im Punkte A halbiert und heifst ein Durchmesser des Parallelogramms.

§ 30. Die besonderen Parallelogramme.

Fig. 53.

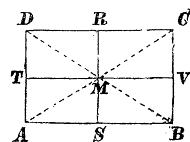


Fig. 54.

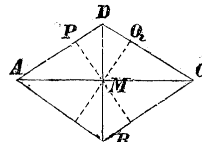
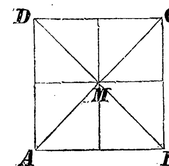


Fig. 55.



a) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es alle. Die Figur heifst Rechteck. Das Rechteck hat zwei Symmetrieachsen, von denen jede die Mittelsenkrechte von zwei Gegenseiten ist. Die Diagonalen sind gleich. Um das Rechteck kann ein Kreis beschrieben werden.

***α*)** Wenn in einem Parallelogramm zwei Nachbarseiten gleich sind, so sind alle Seiten gleich und die Figur heifst Rhombus. Jede Diagonale ist eine Symmetrieachse der Figur; sie halbiert die Winkel, welche sie durchzieht, und halbiert auch die andere Diagonale senkrecht. In den Rhombus kann ein Kreis beschrieben werden.

Beweise. a) Wenn der Winkel A (Fig. 53) recht ist, so beweist man mit mehrmaliger Anwendung von § 8 d, dafs die anderen Winkel auch recht sind. Man verbinde sodann die Mittelpunkte R und S von zwei Gegenseiten mit einander. Dann ist $RS \parallel CB$ nach § 29 b, 2, und RS wird als Mittelsenkrechte der

Gegenseiten DC und AB erkannt. Dann entsprechen sich A und B, C und D für die Achse RS (§ 6 b), d. h. RS ist eine Symmetrieachse des Rechtecks. Die Diagonalen AC und DB entsprechen sich für diese Achse und sind deshalb gleich. Ebenso beweist man die analogen Behauptungen für die Achse TV. Die vier Strecken MA, MB, MC, MD sind als Hälften der gleichen Diagonalen auch gleich, und die vier Ecken liegen daher auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte M.

α) Wenn die Seiten AB und BC des Parallelogramms (Fig. 54) dieselbe Länge a haben, so folgt aus § 29 a, daſs auch die übrigen Seiten diese Länge a haben. Der Rhombus kann aber auf doppelte Weise als Deltoïd (§ 27) betrachtet werden. Folglich halbiert nach § 27 a jede Diagonale die Winkel, die sie durchzieht, und jede Diagonale ist die Mittelsenkrechte der andern. Die aufeinander folgenden Seitenabstände MP und MQ sind gleich, weil M auf der Halbierungslinie des Winkels ADC liegt (§ 20 α). Wenn je zwei aufeinander folgende Seitenabstände gleich sind, so sind es alle, und M ist der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die 4 Seiten des Rhombus berührt.

b) Ein Viereck, welches Rechteck und Rhombus zugleich ist, das heiſst, welches lauter rechte Winkel und lauter gleiche Seiten hat, heiſst Quadrat. Das Quadrat hat 4 Symmetrieachsen. Zwei derselben sind Diagonalen. Die übrigen verbinden die Mitten der Gegenseiten.

Sehnenviereck und Tangentenviereck. **§ 31.**

Fig. 56.

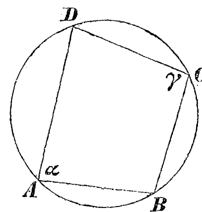
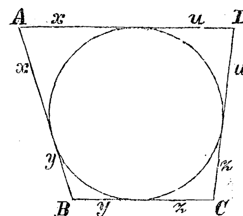


Fig. 57.



a) In einem Viereck, dessen Ecken auf dem Kreise liegen (Sehnenviereck), ist die Summe zweier Gegenwinkel 180°.

α) In einem Viereck, dessen Seiten einen Kreis berühren (Tangentenviereck), ist die Summe je zweier Gegenseiten gleich groſs.

Beweise. a) (Fig. 56.) $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DCB}$; $\gamma = \frac{1}{2} \cdot \widehat{DAB}$; $\alpha + \gamma = \frac{1}{2} \cdot 360^0 = 180^0$ (vgl. § 24 b).

α) Die gleichen Tangentenabschnitte (§ 16 c) in Fig. 57 sind mit gleichen Buchstaben bezeichnet. Man liest ab, daſs die Summe je zweier Gegenseiten $x + y + z + u$ ist.

b) Das Rechteck*) ist das einzige Parallelogramm, um welches man einen Kreis beschreiben kann.

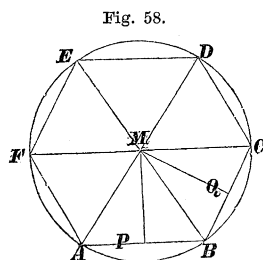
β) Der Rhombus ist das einzige Parallelogramm, in welches man einen Kreis beschreiben kann.

§ 32. **Regelmäſsige Vielecke.**

Die folgenden Aufgaben setzen voraus, daſs man sich den Vollwinkel oder die Kreislinie in n gleiche Teile geteilt denke (n eine ganze Zahl). Die Ausführung dieser Konstruktion mit Zirkel und Lineal ist jedoch nur in einzelnen Fällen möglich, z. B. für $n = 6$ und $n = 10$ und die daraus durch Halbierung oder fortgesetzte Verdoppelung von n erhaltenen Zahlen.

a) Wenn man in einem Kreise n Radien zieht, welche den Winkelraum um den Mittelpunkt in n gleiche Teile teilen, so entstehen auf der Peripherie die Ecken eines Vielecks, welches lauter gleiche Seiten und Winkel hat (regelmäſsiges n-Eck, Fig. 58).

Fig. 58.



Beweis. Man lasse das Vieleck eine Drehung von $\frac{360^0}{n}$ um den Mittelpunkt beschreiben. Dann deckt jeder Radius den folgenden Radius der Fig. 58, und daher fällt auch jedes Eck des Vielecks auf das folgende Eck. Dabei deckt auch jede Seite die folgende, woraus die Gleichheit aller Seiten folgt. Ferner deckt jeder Winkel den folgenden, so daſs auch die Gleichheit aller Vieleckswinkel erkannt wird.

b) Aufgabe. Über der Seite $AB = s$ (Fig. 58) ein regelmäſsiges n-Eck zu zeichnen.

Analyse. Die gemeinsame Gröſse aller Vieleckswinkel ist $\alpha = (n - 2) \cdot 180^0 : n$. Seien nun A und B zwei Ecken des Vielecks ($AB = s$), so ist ein Ort für die Lage des folgenden Eckpunktes der freie Schenkel des in B angetragenen Winkels α. Ein zweiter Ort ist der mit s um B beschriebene Kreis. Man erhält also für den dritten Eckpunkt C nur eine Lage und so fort,

---

*) Das Quadrat wird zugleich als Rechteck und als Rhombus betrachtet.

so dafs über der Seite $AB = s$ nur ein einziges regelmäfsiges n-Eck konstruiert werden kann. Die Konstruktion nach der Analyse ist leicht auszusprechen. Man erhält aber nach a) dieses einzig mögliche n-Eck auch, indem man die in a) beschriebene Konstruktion in einem Kreise vornimmt, welcher über der Sehne s den Centriwinkel $360^0 : n$ fafst.

Folgerung. Jedes regelmäfsige n-Eck kann in einen Kreis gezeichnet werden.

c) Um und in jedes regelmäfsige Vieleck läfst sich ein Kreis beschreiben. Die Mittelpunkte beider Kreise fallen in einen Punkt (Mittelpunkt des Vielecks). Durch diesen Punkt gehen die Mittelsenkrechten der Seiten und die Halbierungslinien der Winkel.

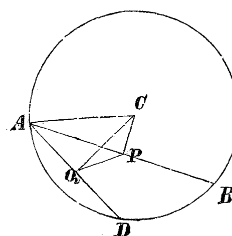
Nach der Folgerung aus b) läfst sich jedes regelmäfsige Vieleck (n-Eck) in einen Kreis zeichnen. Hiermit ist schon bewiesen, dafs ein Kreis um das Vieleck beschrieben werden kann. In der Figur 58 deckt aber nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung jedes Dreieck wie AMB, BMC das folgende. Folglich decken sich auch die Höhen der aufeinander folgenden Dreiecke, d. h. alle Seiten des Vielecks haben vom Mittelpunkte denselben Abstand. Ein Kreis, der mit diesem Abstand als Radius um M beschrieben ist, berührt alle Seiten des Vielecks. Nun gehen die Mittelsenkrechten der Seiten (Sehnen) nach § 20 a und die Halbierungslinien der Vieleckswinkel (Tangentenwinkel) nach § 20 α durch den Mittelpunkt.

Anmerkung. Die Radien des dem Vieleck umbeschriebenen und des einbeschriebenen Kreises heifsen der grofse und der kleine Radius des regelmäfsigen Vielecks.

Der Kreis als Grenzfigur regelmäfsiger Vielecke. § 33.

a) 1) Zu gleichen Sehnen gehören gleiche Centriwinkel und gleiche Abstände vom Mittelpunkt. 2) Wenn man eine Sehne AB um A so dreht, dafs der Winkel mit dem Radius AC wächst, so nimmt die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkt zu. Die Sehne selbst und der Centriwinkel nehmen ab. Hat der Winkel CAB durch dieses Wachsen 90^0 erreicht, so ist die Entfernung der Sehne vom Mittelpunkt dem Radius gleich und die Länge der Sehne ist Null geworden.

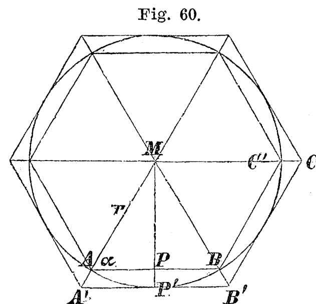
Fig. 59.



Beweise. 1) Gleiche Sehnen sind entsprechende Seiten in zwei Dreiecken, deren übrige Seiten als Radien auch entsprechend gleich sind. Diese Dreiecke sind nach § 19 a kongruent und daraus folgt nach § 18 f die Gleichheit der zugehörigen Centriwinkel. Bringt man die Centriwinkel durch Drehung um den Mittelpunkt zur Deckung, so decken sich auch die beiden Dreiecke und ihre Höhen, welche eben die Entfernungen beider Sehnen sind. 2) Wenn der Winkel CAB durch Wachsen zum Winkel CAD wird, so nimmt sein Komplementwinkel ACP ab und wird zum Winkel ACQ. AP und CQ müssen sich notwendig schneiden. Dann ist $\sphericalangle AQP$ gröfser als $\sphericalangle AQC$ oder gröfser als 90^0. Folglich liegt ihm die gröfste Seite des Dreiecks APQ gegenüber und $AP > AQ$ (§ 12 α). Was von den halben Sehnen gilt, gilt auch von den ganzen. — Ebenso folgt, dafs $\sphericalangle QPC$ stumpf ist und $CQ > CP$. Wenn der Winkel CAB bis 90^0 gewachsen ist, so ist die Sehne AB in die Tangente des Punktes A übergegangen, die Entfernung derselben vom Mittelpunkt ist dem Radius CA gleich und die Länge der Sehne AB ist Null geworden.

b) Der Kreis ist die Grenzfigur, in welche ein regelmäfsiges Vieleck übergeht, wenn seine Seitenzahl ins Unbegrenzte wächst.

Fig. 60.



Die Aufsenwinkel des regelmäfsigen n-Ecks haben die Gröfse $\frac{360^0}{n}$. Jeder Vieleckswinkel ist daher $180^0 - \frac{360^0}{n}$, und der Winkel α (Fig. 60), welchen eine Vielecksseite mit dem durch einen ihrer Endpunkte gehenden Radius bildet, wird $90^0 - \frac{180^0}{n}$ betragen. Wenn sich die Seitenzahl n fortwährend vergröfsert, so nähert sich dieser Winkel 90^0 und die Differenz PP' (Fig. 60) zwischen dem kleinen und grofsen Radius wird nach a) immer kleiner. Dadurch kann das umbeschriebene Vieleck (Fig. 60) dem Zusammenfallen mit dem einbeschriebenen Vieleck und dem dazwischen liegenden Kreise beliebig nahe gebracht werden.

IV. Abschnitt.

Von der Fläche der Figuren.

Flächen, welche kongruent sind oder sich aus kongruenten Stücken zusammensetzen. § 34.

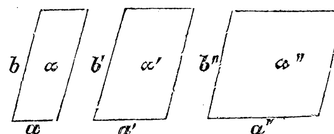
a) Kongruente Figuren, insbesondere Figuren, welche sich für eine Achse oder ein Centrum symmetrisch entsprechen, haben gleiche Fläche.

Beispiel. Die beiden Dreiecke, in welche ein Parallelogramm durch eine Diagonale geteilt wird, haben gleiche Fläche, denn sie entsprechen sich symmetrisch für den Mittelpunkt des Parallelogramms.

b) Für Parallelogramme, deren Winkel entsprechend gleich sind, gelten folgende Sätze:

1) Wenn die homologen Seiten b, b', b'' gleich sind, so verhalten sich die Parallelogramme wie die Nachbarseiten a, a', a''.
2) Wenn die homologen Seiten nicht gleich sind, so verhalten sich die Parallelogramme wie die Produkte $a \,.\, b$, $a' \,.\, b'$, $a'' \,.\, b''$ zweier Nachbarseiten.

Fig. 61.



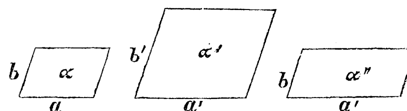
Beweis. 1) Die Seiten b, b', b'' (Fig. 61) seien gleich. Alsdann gehört zu jeder Seite a, a', a'' ein bestimmtes Parallelogramm. Wenn die Seiten a und a' gleich sind, so sind es auch die zugehörigen Parallelogramme α und α' (§ 28 c und 34 a). Wenn die Seite a'' die Summe der Seiten a und a' ist, so wird auch das zugehörige Parallelogramm α'' die Summe von α und α' sein. Demnach folgt aus § 60 die Proportion

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' = a : a' : a''.$$

2) Um $\alpha : \alpha' = a \,.\, b : a' \,.\, b'$ zu beweisen (Fig. 62), nehme man das Parallelogramm α'' mit den Seiten a' und b zu Hilfe. Dann hat man nach 1)

$$\alpha : \alpha'' = a : a'$$
$$\alpha'' : \alpha' = b : b'$$
$$\alpha \,.\, \alpha'' : \alpha'' \,.\, \alpha' = a \,.\, b : a' \,.\, b'$$

Fig. 62.



und weil α'' sich forthebt:

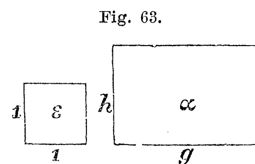
$$\alpha : \alpha' = a \,.\, b : a' \,.\, b'.$$

§ 35. **Berechnung der Flächen von Rechtecken und Dreiecken.**

Die Flächenzahl einer Figur (auch kurz Fläche genannt und mit ω bezeichnet*) ist das Verhältnis der Fläche zur Flächeneinheit, oder diejenige Zahl, mit welcher man die Flächeneinheit vermehren mufs, um die Fläche der Figur zu erhalten. Als Flächeneinheit nimmt man ein Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit (Meter) gleich ist (Quadratmeter).

a) Die Fläche eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe. $\omega = g \,.\, h$**).

Fig. 63.



b) Die Fläche eines Quadrats ist gleich der zweiten Potenz einer Seite. $\omega = g^2$.

c) Die Fläche eines Dreiecks ist die Hälfte des Produktes aus Grundlinie und Höhe. $\omega = \frac{g \,.\, h}{2}$.

Beweise. a) Das Rechteck α in Fig. 63 und die Flächeneinheit ε sind Parallelogramme von entsprechend gleichen Winkeln. Daher ist

$$\omega = \alpha : \varepsilon = g \,.\, h : 1 \,.\, 1 \quad \text{oder} \quad \omega = g \,.\, h.$$

b) Das Quadrat ist ein Rechteck mit gleichen Seiten. Daher ist $\omega = g \,.\, g = g^2$.

c) Wenn das Dreieck rechtwinklig ist, so ergänze man es zu einem Rechteck (Fig. 64), welches mit dem Dreieck gleiche Grundlinie g und die gleiche Höhe h haben wird. Die Fläche des Rechtecks ist $g \,.\, h$. Da dasselbe aus zwei gleichen (§ 34 a) Dreiecken besteht, deren eines das gegebene ist, so ist die Fläche eines solchen Dreiecks $\frac{g \,.\, h}{2}$.

Fig. 64.

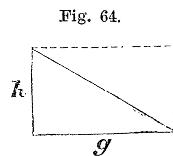


Fig. 65.

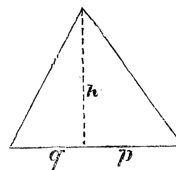
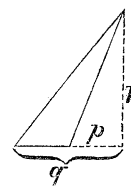


Fig. 66.



*) Der griechische Buchstabe ω (Omega), der in der Stereometrie zur Bezeichnung der Oberfläche gebraucht ist, soll auch hier für die Bezeichnung der Flächenzahl ebener Figuren gebraucht werden.

**) Genauer: die Flächenzahl ist gleich dem Produkte aus den Längenzahlen von Grundlinie und Höhe.

Ist das Dreieck nicht rechtwinklig, so unterscheide man die Fälle von Fig. 65 und 66.

Im ersten Falle hat man $\omega = \frac{q \cdot h}{2} + \frac{p \cdot h}{2} = \frac{(q + p)h}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$.

Im zweiten Falle dagegen $\omega = \frac{q \cdot h}{2} - \frac{p \cdot h}{2} = \frac{(q - p)h}{2} = \frac{g \cdot h}{2}$.

Anmerkung. Das Quadratmeter wird in Quadratdecimeter (qdm), das letztere in Quadratcentimeter (qcm) und dieses in Quadratmillimeter (qmm) geteilt. Es sind diese Flächen Quadrate, deren Seiten der Reihe nach 1 dm, 1 cm, 1 mm betragen. Aus b) ergiebt sich, dafs die Einteilungszahl des Quadratmeters 100 ist, das heifst:

1 qm = 100 qdm = 10 000 qcm = 1 000 000 qmm.

Ferner ist

1 Quadrathektometer (Hektar = ha) = 100 Quadratdekameter (Ar = a) = 10 000 qm.

Flächen von Parallelogrammen, Trapezen, Tangentenvielecken. § 36.

a) Die Fläche eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe: $\omega = g \cdot h$.

Fig. 67.

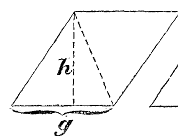


Fig. 68.

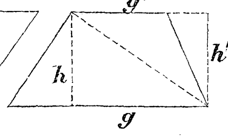
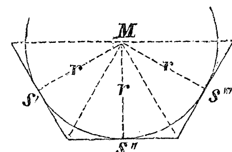


Fig. 69.



b) Die Fläche eines Trapezes (Viereck mit nur zwei parallelen Seiten) ist gleich dem Produkte aus der Höhe und der Hälfte von der Summe der parallelen Seiten. $\omega = \frac{g + g'}{2} \cdot h$.

c) Die Fläche eines dem Kreise umbeschriebenen Vielecks ist gleich der Hälfte des Produktes aus dem Umring des Vielecks und dem Radius des Kreises. $\omega = \frac{u \cdot r}{2}$.

Beweise. a) Das Parallelogramm (Fig. 67) ist das Doppelte eines Dreiecks von derselben Grundlinie und Höhe (§ 34 a). Da die Fläche des Dreiecks $\frac{g \cdot h}{2}$ ist, so ist diejenige des Parallelogramms $g \cdot h$.

b) Das Trapez (Fig. 68) besteht aus zwei Dreiecken, welche

die Flächen $\frac{g \cdot h}{2}$ und $\frac{g' \cdot h}{2}$ haben. Durch Addition ergiebt sich $\frac{g + g'}{2} \cdot h$.

c) Die Fläche besteht aus Dreiecken, welche je eine der Seiten s', s'', s''' ... des Vielecks zur Grundlinie und den Radius des Kreises zur Höhe haben. Man addiere die Flächen dieser Dreiecke und setze $s' + s'' + s''' \cdots = u$.

§ 37. **Folgerungen aus § 35 und § 36 Verhältnisse von Flächen.**

a) Parallelogramme (Rechtecke, Dreiecke) von gleicher Grundlinie und Höhe haben gleiche Fläche.

Parallelogramme (Rechtecke, Dreiecke) von gleicher Fläche und Grundlinie (Höhe) haben gleiche Höhe (Grundlinie).

Beweis. Wenn die Grundlinien und Höhen gleich sind, so sind es auch die Produkte, d. h. die Flächen. Wenn die Flächen und Grundlinien gleich sind, so sind es auch die Quotienten derselben, d. h. die Höhen.

b) 1) Rechtecke (Dreiecke, Parallelogramme) verhalten sich wie die Produkte von Grundlinie und Höhe. Bei gleicher Höhe verhalten sie sich wie ihre Grundlinien und bei gleicher Grundlinie wie ihre Höhen.

2) Parallelogramme (Dreiecke), welche einen Winkel entsprechend gleich haben, verhalten sich wie die Seiten, welche diesen Winkel einschliefsen.

Der Beweis zu 2) ergiebt sich für Parallelogramme aus § 34 b, 2, für Dreiecke aber aus der Bemerkung, dafs jedes Dreieck halb so grofs ist als ein Parallelogramm, welches mit ihm jenen Winkel und die einschliefsenden Seiten gemeinsam hat.

§ 38. **Der Pythagoreische Lehrsatz. — Aufgaben.**

a) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse durch die Höhe teilt, so ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck über der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt derselben.

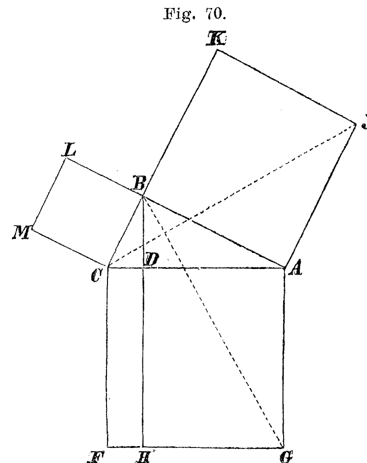
α) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Pythagoreischer Lehrsatz).

Beweise. a) Das Dreieck GAB (Fig. 70) fällt durch eine Viertelsdrehung um A mit dem Dreieck CAJ zusammen, hat also mit ihm dieselbe Fläche. Nun ist aber $\triangle GAB$ die Hälfte von Rechteck $GADH$ (§ 35 a und c) und $\triangle CAJ$

ist die Hälfte von dem Quadrate $AJKB$. Folglich hat auch dieses Quadrat dieselbe Fläche wie jenes Rechteck.

α) Der Beweis ergiebt sich aus a), indem man die Summe der Quadrate $BAJK$ und $BLMC$ in Fig. 70 der Summe der Rechtecke $ADHG$ und $CDHF$ gleichsetzt, welche zusammen das Quadrat $ACFG$ bilden.

Fig. 70.



b) Zusatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich der Differenz der Quadrate über der Hypotenuse und der andern Kathete.

c) Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

γ) Aufgabe. Ein Quadrat zu konstruieren, welches die Summe (Differenz) zweier gegebenen Quadrate ist.

Auflösung. c) (Fig. 70.) $ADHG$ sei das gegebene Rechteck. Man verlängere die kürzere Seite AD, bis sie AG gleich wird ($AC = AG$), und beschreibe über AC als Durchmesser einen Halbkreis. Die Verlängerung der Seite DH schneidet denselben in einem Punkte B, und AB ist die Seite des gesuchten Quadrats (Satz a).

γ) Wenn das gesuchte Quadrat die Summe der gegebenen sein soll, so konstruiere man ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Seiten der gegebenen Quadrate Katheten sind. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist die Seite des gesuchten Quadrats. Soll das gesuchte Quadrat die Differenz der gegebenen sein, so ist die Seite desselben Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem die Hypotenuse und die andere Kathete den Seiten der gegebenen Quadrate gleich sind.

Die Quadrate der Seiten schiefwinkliger Dreiecke. § 39.

a) Das Quadrat einer Dreiecksseite, welche einem spitzen (stumpfen) Winkel gegenüber liegt, wird erhalten, indem man die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert (vermehrt) um das doppelte Rechteck aus der einen dieser Seiten und der Projektion der andern auf dieselbe.

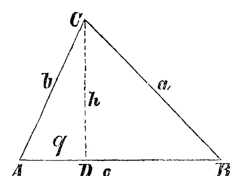


Fig. 71.

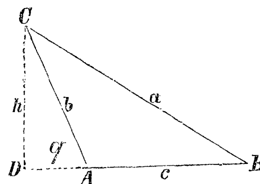


Fig. 72.

Beweis. Aus Dreieck CBD hat man nach § 38α u. 35b

$$a^2 = h^2 + (c \mp q)^2.\text{*)}$$

Hierin ersetzt man h^2 durch den aus Dreieck CDA genommenen Wert $b^2 - q^2$.

$$a^2 = b^2 - q^2 + c^2 \mp 2cq + q^2 = b^2 + c^2 \mp 2cq.$$

V. Abschnitt.

Ähnliche Punktreihen.

Schnitt eines Winkels mit Parallelen.

40. **a)** Wenn man auf einem Winkelschenkel gleiche Stücke abträgt und durch die Teilpunkte Parallelen zieht, so entstehen auf dem andern Schenkel auch gleiche Abschnitte.

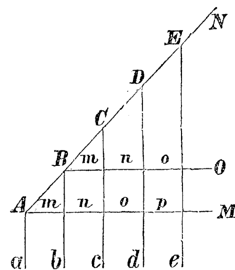


Fig. 73.

Beweis. In Fig. 73 sei $AB = BC = CD \ldots$ und die Geraden a, b, c, d seien parallel. Man verschiebe die ganze Figur längs der Geraden AN um die Strecke AB. Dann fällt jeder der Punkte A, B, $C \ldots$ auf den folgenden, jede der Geraden $a, b, c \ldots$ auf die folgende (§ 8d), und die Gerade AM kommt in die zu AM parallele Lage BO. Die Strecken $m, n, o \ldots$ auf AM kommen in die neuen Lagen $m, n, o \ldots$ auf BO, und man liest aus den entstandenen Parallelogrammen sofort ab:

$$m = n, \quad n = o, \quad o = p \ldots$$

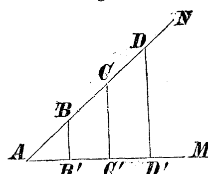
α) Wenn man auf einem Winkelschenkel die Länge x und auf dem andern die Länge y mehrmals abträgt, so sind die durch entsprechende Teilpunkte bestimmten Linien parallel.

---

*) Das obere Zeichen gilt für Fig. 71, das untere für Fig. 72.

Beweis. In Fig. 74 sei $AB = BC\ldots = x$, $AB' = B'C' \ldots = y$. Man ziehe BB' und ziehe auch durch $C, D\ldots$ Parallelen zu BB'. Die durch C gezogene Parallele mufs auf dem andern Schenkel ein Stück von der Länge y mit dem Anfangspunkt B' abschneiden und daher durch C' gehen. CC' ist also mit BB' parallel, u. s. w.

Fig. 74.



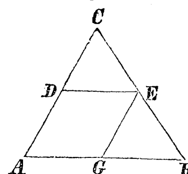
b) Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele mit einer andern, so wird die dritte Seite ebenfalls halbiert.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz a).

β) Diejenige Strecke, welche die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verbindet, ist mit der dritten Seite parallel und halb so grofs wie diese.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus Satz α). Um zu zeigen, dafs $DE = \frac{1}{2} AB$, ziehe man $EG \parallel CA$. Dann ist $GA = GB = \frac{1}{2} AB$ (Satz b). Aus dem Parallelogramm $AGED$ folgt nun $DE = AG = \frac{1}{2} AB$.

Fig. 75.



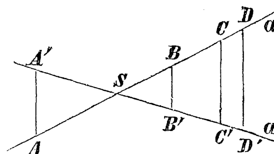
c) Aufgabe. Eine Strecke in n gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Um die Strecke AD in Fig. 74 in n (in der Figur $n = 3$) gleiche Teile zu teilen, ziehe man durch einen Endpunkt A eine Gerade AM und trage eine beliebige Länge y $n$mal ab. Den letzten Teilpunkt D' verbinde man mit D und ziehe durch die übrigen Teilpunkte Parallelen zu $D'D$, welche AD in n gleiche Teile teilen (Satz a).

Ähnliche Punktreihen auf konvergenten Trägern. § 41.

a) Wenn 2 konvergente Gerade von parallelen Linien geschnitten werden, so verhalten sich 2 Strecken der einen Geraden wie die entsprechenden Strecken der andern.

Fig. 76.



Beweis. In Fig. 76 ist durch die Parallelen zu jedem Punkte $A, B\ldots$ der Geraden a ein Punkt A', B' der Geraden a' zugeordnet. Wenn zwei Strecken auf a einander gleich sind, so sind nach § 40a auch die entsprechenden Strecken auf a' gleich. Ferner entspricht der Summe $BC + CD$ zweier Strecken auf a die Summe $B'C' + C'D'$

der homologen Strecken auf a'. Daraus folgt nach § 60, dafs zwei beliebige Strecken von a sich wie die entsprechenden Strecken von a' verhalten.

Zusatz. Zwei Punktreihen heifsen ähnlich, wenn ihre Punkte einander paarweise so entsprechen, dafs 2 Strecken der einen Reihe sich verhalten, wie die entsprechenden Strecken der andern. Die Punktreihen auf den konvergenten Geraden in a sind also ähnlich. Der Schnittpunkt der beiden Träger entspricht sich selbst.

Anmerkung. Von ähnlichen Punktreihen kann man auch sagen: Die Strecken $b, c, d \ldots$ der einen Reihe sind das $m$fache von den entprechenden Strecken $b', c', d' \ldots$ der andern Reihe, denn die Proportion $b' : c' : d' = b : c : d$ wird ersetzt durch $b' = m \,.\, b,\ c' = m \,.\, c \ldots$ (§ 59).

b) Umkehrung von a): Wenn die von dem Schnittpunkte S ausgehenden Abschnitte auf der einen Geraden sich wie die entsprechenden Abschnitte der andern verhalten, so sind die Verbindungslinien entsprechender Endpunkte (Projektionsstrahlen) parallel.

Beweis. In Fig. 76 sei

$$SB : SC = SB' : SC'. \qquad 1)$$

Man ziehe durch C eine Parallele zu BB' und beweise, dafs ihr Schnittpunkt M mit der Geraden a' kein anderer als der Punkt C' ist. In der That hat man nach § 41a)

$$SB : SC = SB' : SM. \qquad 2)$$

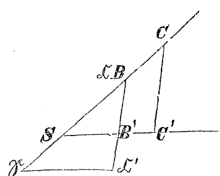
Aus 1) und 2) schliefst man

$$SB' : SC' = SB' : SM \quad \text{oder} \quad SC' = SM.$$

Zusatz: Die Punktreihen in b) sind ähnlich (nach § 41a und Zusatz).

c) Parallele Strecken, welche in einen Winkel eingelegt sind, verhalten sich wie die Abstände ihrer Endpunkte (auf demselben Winkelschenkel) vom Scheitel.

Fig. 77.



Beweis. Man verschiebe das Dreieck SCC' längs der Geraden SC, bis C in die Lage B oder $\mathfrak{C}$ kommt. Dann ist die neue Lage $\mathfrak{S}\mathfrak{C}'$ von SC' mit der alten parallel (§ 8c). Man hat nach Satz a) $B'B : \mathfrak{C}\mathfrak{C}' = SB : \mathfrak{S}\mathfrak{C}$, oder nach Einsetzung $B'B : C'C = SB : SC$.

Anmerkung. Bezeichnung der Länge und Richtung von Strecken.

Um für Strecken auf derselben Geraden oder auf parallelen Geraden die Beziehung zwischen ihren Längen und diejenige zwischen ihren Richtungen durch dasselbe Zeichen auszudrücken, verfährt man folgendermafsen.

Die zwei entgegengesetzten Richtungen einer Geraden werden als positive und negative Richtung unterschieden. Es ist der Wahl überlassen, welche Richtung man als die positive ansehen will, nur müssen, wenn parallele Geraden in der Figur vorhanden sind, die positiven Richtungen derselben übereinstimmen. Die Längenzahl einer Strecke erhält nun das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Richtung von ihrem Anfangspunkte nach dem Endpunkte mit der positiven oder negativen Richtung der Geraden übereinstimmt, und die so definierte algebraische Gröfse wird bezeichnet, indem man den Buchstaben des Endpunktes hinter denjenigen des Anfangspunktes schreibt und dieses Symbol mit einer Klammer umgiebt. Wenn in Fig. 78 der Pfeil die positive Richtung bezeichnet und CA als Längeneinheit angesehen wird, so ist $(CA) = +1$, $(AB) = +3$, $(BA) = -3$, $(AB) = -(BA)$.



Der Quotient (das Verhältnis) und das Produkt zweier Strecken werden nach den Regeln der Algebra gebildet, so dafs dieselben positiv oder negativ werden, je nachdem die beiden Strecken gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben. So ist z. B. das Verhältnis $(CA : CB)$, welches das Abstandsverhältnis des Punktes C von den Punkten A und B heifst, positiv in Fig. 78, nämlich $(CA) : (CB) = +1 : 4$ und negativ in Fig. 79, nämlich $(CA) : (CB) = -3 : 1$.

Nimmt man jedoch auf die Richtung der Strecken keine Rücksicht, so bezeichnet man die Strecken durch die Buchstaben der beiden Endpunkte in beliebiger Ordnung und ohne Klammer. Diejenigen Zahlen, welche die Länge von Strecken, ihr Verhältnis oder Produkt ausdrücken, erhalten kein Vorzeichen, sondern sind als absolute Zahlen zu betrachten.

Mit Beziehung auf die Richtung der Strecken würde man für die ähnlichen Punktreihen in Fig. 76 schreiben:

$$(SB) : (SC) = (SB') : (SC') \text{ und } (B'B) : (C'C) = (SB) : (SC).$$

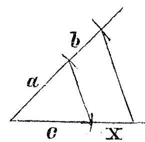
Aufgaben. § 42.

a) Satz und Aufgabe. Zwei ähnliche Punktreihen sind durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt. Man soll

zu jedem weitern Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der andern finden.

Auflösung. Man vereine zwei der als entsprechend angegebenen Punkte in S (Fig. 76). Mit der Verbindungslinie BB' der übrigen gegebenen Punkte müssen die Projektionsstrahlen parallel sein (§ 41b). Der zu C gehörige Punkt C' wird also gefunden, indem durch C eine Parallele zu BB' gezogen wird.

Fig. 80.



b) Aufgabe. Zu drei Strecken a, b, c die vierte Proportionale x zu finden, das heifst die Proportion $a : b = c : x$ zu erfüllen.

Die Auflösung ist durch die Figur 80 versinnlicht. Durch den Endpunkt von b ist eine Parallele zu der Strecke gezogen, welche die Endpunkte von a und c verbindet. Zum Beweise wende § 41 a) an.

c) Die Strecke AB (Fig. 81) oder ihre Verlängerung nach einem gegebenen Verhältnis $r : s$ zu teilen, d. h. einen Punkt P auf dem Träger von AB zu finden, so dafs $PA : PB = r : s$.

Fig. 81.

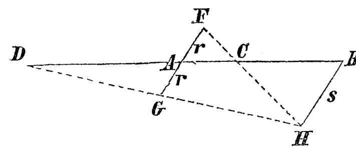
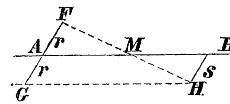


Fig. 82.



Auflösung. Man trage von A und B aus auf zwei Parallelen die Längen r und s nach entgegengesetzter (gleicher) Richtung ab und verbinde die Endpunkte F und H (G und H). Diese Verbindungslinie schneidet den Träger von AB in einem Punkte C (D), welcher die Strecke AB innerhalb (aufserhalb) nach dem Verhältnis $r : s$ teilt. Zum Beweise benutze man § 41 c).

γ) Aufgabe. Die Punkte C und D (Fig. 81) bilden, wie man sagt, mit A und B vier harmonische*) Punkte. (AB ist in C und D harmonisch geteilt.) Wenn ein beliebiger Punkt C auf dem Träger von AB gegeben ist, so soll man den zugeordneten vierten harmonischen Punkt bestimmen.

Auflösung. Ziehe durch A und B zwei Parallelen und schneide dieselben mit einer durch C gezogenen Geraden in F

*) Siehe die Übungen § 7, Üb. 7.

und H. Mache AG gleich und entgegengesetzt gerichtet mit AF, so bestimmt die Gerade GH den gesuchten Punkt.

d) Lehrsatz. Wenn die Strecke AB durch die Punkte C und D harmonisch geteilt wird, so wird auch die Strecke CD durch die Punkte A und B harmonisch geteilt.

Beweis. Man leite zunächst, ohne auf das Vorzeichen der Strecken Rücksicht zu nehmen, aus der Proportion $CA:CB = DA:DB$, welche der Voraussetzung nach gilt, durch Vertauschung der mittleren Glieder $AC:AD = BC:BD$ ab, woraus die Behauptung mit Berücksichtigung der gegenseitigen Lage der Punkte sich ergiebt.

Fig. 83.



Anmerkung zu c). Um einzusehen, daſs C und D die einzigen Lagen des in Aufgabe c) gesuchten Punktes P sind, denke man sich das Verhältnis $r:s$ veränderlich und folge nachstehender Betrachtung (Fig. 81):

Macht man $GA = AF = BH$, so fällt der Punkt C in die Mitte M zwischen A und B (Fig. 82), der zugeordnete Punkt D hingegen fällt wegen des Parallelismus von AB und GH (Fig. 82) in unendliche Ferne. Läſst man die Strecken $AF = AG$ bis zum Zusammenfallen der Punkte F und G mit A abnehmen, während BH seine Länge beibehält, so rückt Punkt C aus der Mitte M gegen A und Punkt D aus unendlicher Ferne von links her ebenfalls gegen A, bis beide in A zusammentreffen. Gleichzeitig hat das Verhältnis $PA:PB = r:s$ von 1 bis 0 stetig abgenommen. Behält man aber die Länge von $AF = AG$ bei, während man BH bis zum Zusammenfallen der Punkte B und H abnehmen läſst, so wandert C von M gegen B, und D rückt von rechts her aus unendlicher Ferne gegen B, um zugleich mit C daselbst anzukommen. Dabei wächst der Wert des Verhältnisses $PA:PB = r:s$ von 1 aus bis über jede angebbare Zahl. Man sieht hieraus, daſs das Verhältnis $PA:PB$ nur zweimal einen gegebenen Wert annehmen kann. Man sieht hieraus ferner: in A wie in B fallen je zwei zugeordnete Punkte in einem einzigen zusammen. Wenn zwei Punkte C und D sich so bewegen, daſs sie jederzeit die Strecke AB harmonisch teilen, so bewegen sie sich in entgegengesetzter Richtung. Zwei zugeordnete Punkte liegen auf der gleichen Seite des Mittelpunktes von AB. Strecken, welche zugeordnete Punkte verbinden, schlieſsen sich aus, oder die kleinere liegt innerhalb der gröſseren. Kreise, welche man über solchen Strecken als Durchmessern zieht, können sich nie schneiden.

§ 43. **Ähnliche Punktreihen auf parallelen Trägern.**

a) Parallele Gerade werden von den Strahlen eines Strahlbüschels in ähnlichen Punktreihen geschnitten. Die entsprechenden Strecken derselben sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der Mittelpunkt des Büschels aufserhalb oder innerhalb des Streifens gelegen ist.

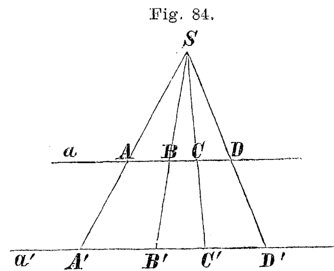


Fig. 84.

Beweis. Die Verhältnisse $SA : SA'$, $SB : SB'$, $SC : SC' \ldots$ (Fig. 84) sind nach § 41 a gleich. Jedes der Verhältnisse $AB : A'B'$, $AC : A'C'$, $BC : B'C' \ldots.$ ist aber durch eines jener andern Verhältnisse auszudrücken (§ 41 c).

α) Wenn die Träger zweier ähnlichen Punktreihen parallel laufen, so sind alle Projektionsstrahlen Strahlen eines Büschels. Der Scheitel desselben teilt die Projektionsstrahlen aufserhalb oder innerhalb nach dem Verhältnis entsprechender Strecken.

Beweis. Die beiden Projektionsstrahlen AA' und BB' mögen sich in S schneiden. Man zeige, dafs SC die Gerade a' in keinem andern Punkte, als im entsprechenden Punkte C' schneidet. In der That, wenn der Schnitt von SC und a' mit P bezeichnet wird, so ist $AB : BC = A'B' : B'C'$ (nach Voraussetzung) und $AB : BC = A'B' : B'P$ (nach § 43 a). Daraus folgt $A'B' : B'C' = A'B' : B'P$, oder $B'C' = B'P$. — Die Punkte C' und P fallen zusammen.

§ 44. **Anwendungen.**

a) In jedem Trapez liegen die Mittelpunkte paralleler Seiten, der Schnittpunkt der konvergenten Seiten und der Schnittpunkt der Diagonalen auf einer Geraden. Der Abstand der beiden ersten Punkte wird durch die andern harmonisch geteilt.

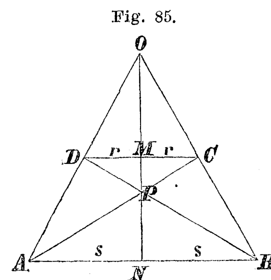


Fig. 85.

Beweis. Nennt man die Hälften der parallelen Seiten r und s, so sieht man aus Aufgabe c) in § 42, dafs jede Diagonale die Strecke MN innen nach dem Verhältnis $r : s$ teilt, während jede der schiefen Seiten dasselbe aufsen thut. Hierdurch sind alle Behauptungen erwiesen.

b) Die Geraden aus den Mitten

der Dreiecksseiten nach den gegenüberliegenden Ecken (die Schwerpunktstransversalen) schneiden sich in einem Punkte (Schwerpunkt) und teilen einander nach dem Verhältnis 1 : 2.

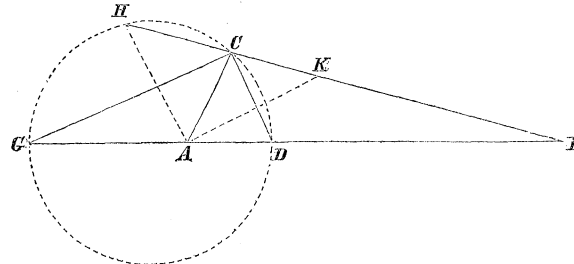
Beweis. Die Gerade DC (Fig. 85), welche die Mittelpunkte zweier Dreiecksseiten verbindet, ist mit AB parallel und schneidet also ein Trapez ab. Die Mittellinien AC und BD schneiden sich als Diagonalen des Trapezes auf der Geraden, welche durch die Mitten von AB und DC, sowie durch O geht (Satz a), und demnach nichts anderes als die dritte Mittellinie des Dreiecks ist. Nun verhält sich nach § 41 c $PC : PA = CD : AB = 1 : 2$.

Die Halbierungslinien der Dreieckswinkel. § 45.

a) Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und seines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Seite innen und aufsen nach dem Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis. (Fig. 86.) a) Wenn die Winkel ACD und DCB einander gleich sind, so beweise man (§ 8, d, § 12 β), dafs die durch A mit CD gezogene Parallele AH ein gleichschenkliges Dreieck AHC abschneidet. Der Parallelismus von AH und DC

Fig. 86.



liefert die Proportion $DA : DB = CH : CB$ (§ 41 a), woraus man durch Einsetzen von CA für CH erhält: $DA : DB = CA : CB$. Wenn andererseits die Winkel ACG und GCH gleich sind, so ziehe man AK mit GC parallel und verfahre ganz wie im Vorigen, um $GA : GB = CA : CB$ zu erhalten. Aus diesen beiden Proportionen folgt die Behauptung. Da die Halbierungslinien der Winkel ACB und ACH die einzigen Geraden durch C sind, welche AB innen und aufsen nach dem Verhältnis $CA : CB$ teilen (Anmerk. zu § 42), so kann der Satz a) auch umgekehrt werden:

α) Diejenigen Geraden, welche durch die Spitze eines Dreiecks gehen und die gegenüberliegende Seite innen und

aufsen nach dem Verhältnis der andern Seiten teilen, sind die Halbierungslinien des Winkels an der Spitze und seines Nebenwinkels.

§ 46. **Anwendungen.**

a) Der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von zwei festen Punkten A und B ein gegebenes Verhältnis bilden, ist ein Kreis, welcher AB nach demselben Verhältnis harmonisch teilt und die Strecke zwischen den Schnittpunkten zum Durchmesser hat.

Beweis. 1) Wenn (Fig. 86) $CA : CB = DA : DB = GA : GB$, so stehen CD und CG als Halbierungslinien zweier Nebenwinkel (§ 45 α) senkrecht auf einander. Hieraus folgt nach § 25 b, dafs C auf einem Kreise liegt, welcher die Strecke GD zum Durchmesser hat.

2) Wenn $DA : DB = GA : GB$ und C ein beliebiger Punkt des Kreises über dem Durchmesser DG ist, so mufs auch das Verhältnis $CA : CB$ dem gemeinsamen Wert der Verhältnisse $DA : DB$ und $GA : GB$ gleich sein. Hätte nämlich $CA : CB$ einen andern Wert, so würde C nach 1) noch auf einem zweiten Kreise liegen, welcher AB nach diesem andern Verhältnis innen und aufsen teilt, was unmöglich ist, da nach § 42 Anmerkung diejenigen Kreise sich nicht schneiden, welche die Abstände zugeordneter harmonischer Punkte zu Durchmessern haben. Aus 1) und 2) folgt die Behauptung.

α) Der geometrische Ort aller Punkte, von welchen aus zwei Strecken AD und DB (Figur 86) unter gleichen Winkeln gesehen werden, ist ein Kreis, welcher AB in D und G harmonisch teilt und die Strecke DG zum Durchmesser hat.

Der Beweis ergiebt sich aus § 45 und 46 a.

b) Aufgabe. Auf einer Geraden sind 3 Strecken AB, BC und CD gegeben. Man soll einen Punkt finden, von welchem aus diese Strecken unter gleichen Winkeln gesehen werden.

Auflösung. Man konstruiere den geometrischen Ort α) zweimal für die Strecken AB, BC und BC, CD. Wenn die beiden Kreise sich schneiden, so erhält man zwei Punkte der gesuchten Art, deren Abstand von AD senkrecht halbiert wird.

c) Ein Punkt C (Fig. 87) aufserhalb des Kreises und die zugehörige Berührungssehne teilen den durch C gezogenen Durchmesser harmonisch.

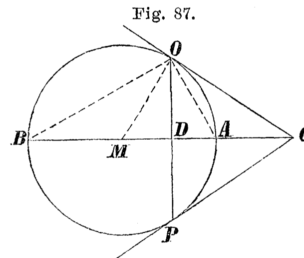


Fig. 87.

Beweis. (Fig. 87.) Wenn CO und CP Tangenten und AB der durch C gezogene Durchmesser ist, so sind die Bogen AO und AP und deshalb auch die Winkel COA und DOA einander gleich. Die Schenkel OA und OB des rechten Winkels AOB halbieren also in dem Dreieck COD den Winkel bei O und seinen Nebenwinkel, woraus (§ 45 a) $AC : AD = BC : BD$ und (§ 42 d) $CA : CB = DA : DB$ folgt.

VI. Abschnitt.

Ähnlichkeit der Figuren.

Ähnliche Figuren. **§ 47.**

Definition.

a) Zwei Figuren (deren Punkte sich paarweise entsprechen) heifsen ähnlich, wenn man sie so in einen Strahlenbüschel legen kann, dafs je zwei entsprechende Punkte auf demselben Strahle liegen (perspektivische Lage) und die Abstände solcher Punkte vom Scheitel in einem festen Verhältnisse stehen.

Dabei mufs angegeben sein, ob je 2 entsprechende Punkte auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite des Scheitels S liegen sollen (diese Bestimmung kann jedoch, wie die Anmerkung erklärt, durch das Vorzeichen des Verhältnisses ausgedrückt sein). Im ersten Falle heifst der Punkt S innerer Ähnlichkeitspunkt, im zweiten Falle heifst er äufserer Ähnlichkeitspunkt der beiden Figuren. Jeder Strahl des Büschels S heifst ein Ähnlichkeitsstrahl. Verschiebt man die Figuren so, dafs nicht mehr je zwei entsprechende Punkte auf demselben Strahle eines Büschels liegen, so hat man eine „schiefe" Lage der ähnlichen Figuren erhalten.

Anmerkung. Wenn man auf die Vorzeichen der Strecken und ihrer Verhältnisse Rücksicht nimmt, so wird der Ähnlichkeitspunkt ein innerer sein, sobald der gemeinsame Wert der Verhältnisse $SA : SA'$, $SB : SB' \ldots$ negativ ist (Fig. 88 u. 90). Dagegen ist der Ähnlichkeitspunkt ein äufserer, wenn der Wert jener Verhältnisse positiv ist (Fig. 89 u. 91). Ist insbesondere

der Wert jener Verhältnisse $SA : SA'$, $SB : SB' \dots$ der positiven Einheit gleich, so geht die Ähnlichkeit in Kongruenz über. Ist jener Wert der negativen Einheit gleich, so erhält man als besondern Fall der ähnlichen Figuren in perspektivischer Lage die centrische Symmetrie.

b) Zusatz zu a). Die zweite Bedingung der Definition für 2 entsprechende Punkte eines Strahles kann man auch so aussprechen: Die Abstände vom Ähnlichkeitspunkt bis zu den Punkten der einen Figur sind das $m$fache der entsprechenden Abstände für die andere Figur.

Beweis. Die Proportionen $SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC \dots$ werden durch die Gleichungen $SA' = m \,.\, SA$, $SB' = m \,.\, SB$, $SC' = m : SC \dots$ ersetzt, wo m den gemeinsamen Wert jener Verhältnisse bezeichnet (§ 59).

c) Beispiele. 1) Die koncentrischen Kreisbogen in Fig. 88 oder Fig. 89 sind ähnliche Figuren. 2) Die parallelen Strecken AC und $A'C'$ in Fig. 90 oder Fig. 91 sind ähnliche Figuren.

Fig. 88.

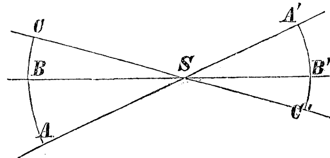


Fig 89.

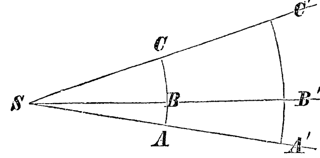


Fig. 90.

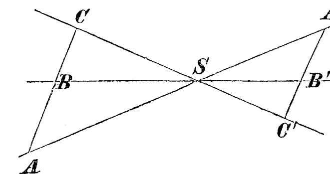
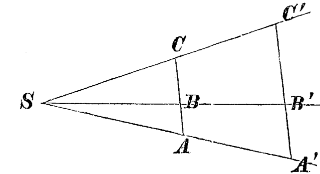


Fig. 91.



1) Je zwei (entsprechende) Kreispunkte liegen auf einem Strahle des Büschels S. Ihre Abstände von S stehen in demselben Verhältnis, nämlich in dem Verhältnis der Radien.

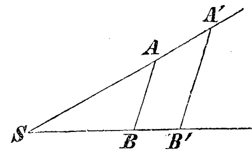
2) Je zwei (entsprechende) Punkte liegen auf einem Strahle des Büschels S. Ihre Abstände vom Scheitel stehen in demselben Verhältnis, denn nach § 41a hat man $SA' : SA = SB' : SB = SC' : SC$.

d) Wenn der Ähnlichkeitspunkt und zwei entsprechende Punkte eines Ähnlichkeitsstrahles gegeben sind, so kann

man zu jedem Punkte, der als Punkt der einen Figur angenommen wird, den entsprechenden Punkt der andern Figur angeben. Die Anzahl der Paare entsprechender Punkte in beiden Figuren ist also unbegrenzt. Der Ähnlichkeitspunkt ist der einzige sich selbst entsprechende Punkt beider Figuren.

S (Fig. 92) sei der Ähnlichkeitspunkt und AA' zwei entsprechende Punkte eines Ähnlichkeitsstrahles. Um zu B den homologen Punkt B' zu finden, hat man zu bedenken: 1) B' mufs auf dem Strahle SB liegen. 2) Wenn $SA' : SA$ mit m bezeichnet wird, so ist auch $SB' : SB = m$, oder $SB' = m \,.\, SB$. Man kennt also die Strecke SB' (für die Richtung siehe das zur Definition a Bemerkte) und kommt durch Auftragen derselben zum Punkte B'. Soll der zu S gehörige Punkt gesucht werden, so bedenke man, dafs der Abstand des Punktes S vom Scheitel Null ist. Der Abstand des entsprechenden Punktes vom Scheitel mufs das $m$fache hiervon, also ebenfalls Null sein. Wenn aufserdem noch ein Punkt beider Figuren sich selbst entspräche, wenn z. B. A und A' zusammenfielen, so wäre $m = 1$ und die Figuren müfsten zusammenfallen.

Fig. 92.



Anmerkung. Wenn man im Auge hat, dafs die Anzahl der Paare entsprechender Punkte unbegrenzt ist, so spricht man auch wohl von ähnlichen Systemen*). Aus § 48 wird hervorgehen, dafs man auch zu jeder Geraden der Ebene, als einem Strahle des ersten Systems einen entsprechenden Strahl des zweiten Systems bestimmen kann.

Eigenschaften ähnlicher Figuren. § 48.

a) Wenn beliebig viele Punkte der einen Figur in einer Geraden a liegen, so liegen die entsprechenden

α) Wenn beliebig viele Strahlen der einen Figur durch einen Punkt A gehen, so gehen die entsprechenden Strahlen

*) Ein ebenes System ist die Gesamtheit der Punkte und Strahlen einer Ebene. Die Ebene heifst der Träger des Systems. Denkt man sich nun zwei Ebenen als zusammenfallend, so kann man von 2 ebenen Systemeu auf demselben Träger sprechen. Im obigen Falle werden nun die Punkte und Strahlen der Ebene, sofern sie der einen Figur zugerechnet werden können, als Punkte des ersten Systems, und die Punkte und Strahlen derselben Ebene, sofern sie auch der zweiten Figur zugerechnet werden können, als Punkte des zweiten Systems angesehen.

Punkte auf einer zu a parallelen*) Geraden a'. Die Geraden a und a' heifsen entsprechende Strahlen beider Figuren.

der zweiten Figur durch den entsprechenden Punkt A'.

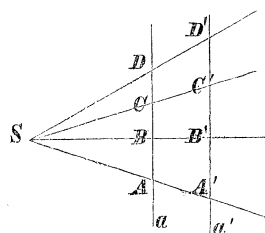


Fig. 93.

Es ist in § 47 c bewiesen worden, dafs den Punkten A, B, C, D einer Geraden a (Fig. 93) die Punkte einer Geraden a' entsprechen, welche durch den Punkt A', welcher A entspricht, parallel zu a gezogen ist. Beliebig vielen Strahlen durch A entsprechen also ebensoviele Strahlen durch A'.

b) Je zwei entsprechende Strecken bilden dasselbe Verhältnis**).

β) Je zwei entsprechende Winkel sind gleich. (Siehe die Übungen § 8 Ub. 14.)

b) Man setze die perspektivische Lage voraus. 1) Für die Strahlen des Büschels hat man (§ 47 a) $SA':SA = SB':SB = SC':SC = m$ (Fig. 94). Wende den Zusatz zu § 41 b an. 2) Für entsprechende Strecken auf parallelen Geraden folgt aus § 41 c) $A'B':AB = SA':SA = m$ und $B'C':BC = SB':SB = m$.

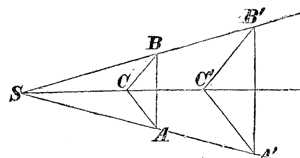


Fig. 94.

β) Entsprechende Winkel sind gleich, weil ihre Schenkel paarweise parallel laufen.

Zusatz zu b). Die Strecken der einen Figur sind das $m$fache von den entsprechenden Strecken der andern Figur und verhalten sich demnach wie diese entsprechenden Strecken.

Dies folgt aus den Gleichungen im Beweise von c), wenn man die Nenner wegschafft.

c) Aufgabe. Zu einer gegebenen Figur eine ähnliche zu zeichnen, wenn die Länge der Strecke $A'B'$ gegeben ist, welche der Strecke AB in der gegebenen Figur entspricht.

1) Lege die Strecke $A'B'$ auf AB, so dafs die Anfangs-

---

*) Bei perspektivischer Lage.

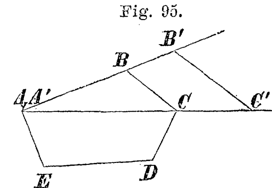
**) Ausführlicher heifsen die Sätze b) und β):

Jeder Punktreihe der einen Figur entspricht eine ähnliche Punktreihe der andern.

Jedem Strahlenbüschel der einen Figur entspricht ein kongruenter Strahlenbüschel der andern.

punkte AA' zusammenfallen. Dann ist AA' der Ähnlichkeitspunkt beider Figuren (siehe die letzte Behauptung in § 47 d), und man kennt die entsprechenden Punkte B, B' eines Ähnlichkeitsstrahles. Nach § 47 d kann man zu jedem Punkte C, D . . der ersten Figur den entsprechenden der zweiten Figur finden. Um C' zu finden, ziehe man durch B' die Parallele zu BC. Ihr Schnittpunkt mit der Verlängerung von AC ist der gesuchte Punkt.

Fig. 95.



2) Man kann auch die gesuchte Figur in schiefer Lage konstruieren. Da das Verhältnis $A'B' : AB = m$ gegeben ist, so kennt man die Länge aller Strecken der zweiten Figur, denn sie sind das $m$fache der entsprechenden Strecken in der ersten Figur (Zusatz zu c). Aufserdem sind alle Winkel der zweiten Figur bekannt, denn sie sind den entsprechenden Winkeln der ersten Figur gleich. Man findet also die Figur durch Wiederholung von Dreieckskonstruktionen.

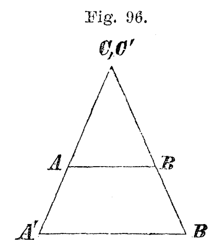
Anmerkung. Aus der zweiten Konstruktionsart erkennt man, dafs nur eine Figur als Lösung möglich ist. Die beiden in 1) und 2) erhaltenen Figuren sind daher nicht verschieden.

Ähnliche Dreiecke. § 49.

a) Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Winkel entsprechend gleich haben.

Beweis. Die Dreiecke seien mit den gleichen Winkeln bei C und C' auf einander gelegt (Fig. 96), und aufserdem seien die Winkel bei A und A' gleich. Alsdann sind die Seiten AB und $A'B'$ parallel und aus § 41 a) folgt $CA' : CA = CB' : CB$. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind also ähnlich ($\triangle ABC \sim A'B'C'$) und in perspektivischer Lage; der Ähnlichkeitspunkt ist der Punkt CC' (§ 47 a).

Fig. 96.



b) Aufgabe. Dreiecke zu zeichnen, von welchen gegeben ist: 1) Das Verhältnis zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel, 2) das Verhältnis zweier Seiten und der der gröfseren Seite gegenüberliegende Winkel, 3) die Verhältnisse der drei Seiten.

Auflösung. Man nehme für eine dieser Seiten eine beliebige Länge a an, dann kann man die übrigen in der Aufgabe

vorkommenden Seiten berechnen oder konstruieren und das Dreieck nach § 19 a), c), d) zeichnen.

Man erhält nach § 19 ein einziges Dreieck, es sei das Dreieck ABC in Fig. 96, wo $CB = a$ sein soll.

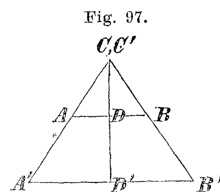
Für eine andere Seitenlänge a' der Seite a erhält man auf dieselbe Weise ebenfalls ein einziges Dreieck. Man findet aber dasselbe leichter, indem man CB' gleich a' macht und durch B' die Parallele $B'A'$ zu AB zieht, denn beide Dreiecke sind ähnlich und haben deshalb die Winkel und Seitenverhältnisse gleich.

Folgerung. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen 1) das Verhältnis zweier Seiten und der eingeschlossene Winkel, 2) das Verhältnis zweier Seiten und der der gröfseren gegenüberliegende Winkel, 3) die Verhältnisse der drei Seiten gleich sind.

c) In ähnlichen Dreiecken ist das Verhältnis entsprechender Transversalen (Höhen, Mittellinien ..) gleich dem Verhältnis entsprechender Seiten.

Beweis für die Höhen. Die Dreiecke seien in perspektivische Lage gebracht. Die durch den Ähnlichkeitspunkt C, C' (Fig. 97) auf AB gefällte Senkrechte ist auch senkrecht auf $A'B'$. Die Schnittpunkte D, D' (§ 47 c, 2) und folglich auch die Strecken CD und $C'D'$ sind entsprechend. Nun folgt die Behauptung aus § 48 b.

Fig. 97.



d) Die Umringe ähnlicher Dreiecke stehen im Verhältnis homologer Seiten.

Aus $a' = ma$, $b' = mb$, $c' = mc$ folgt durch Addition $a' + b' + c' = m(a + b + c)$ oder $a' + b' + c' : a + b + c = m$, womit die Behauptung erwiesen ist.

e) Die Flächen ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Aus $a' = m \, . \, a$ und $h' = m \, . \, h$ folgt

$$\frac{a' \, . \, h'}{2} = m^2 \cdot \frac{a \, . \, h}{2} \text{ oder } \frac{a' \, . \, h'}{2} : \frac{a \, . \, h}{2} = m^2,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 50. Kreise als ähnliche Figuren.

a) In ähnlichen Figuren (Systemen) entspricht jedem Kreise der einen Figur ein Kreis der andern. Die Mittelpunkte sind entsprechende Punkte.

Wenn die Punkte A, B ... (Fig. 98) auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte C liegen und C', A', B' ... die entsprechenden Punkte der andern Figur sind, so hat man $C'A' : CA = C'B' : CB$ ..... Da nun die Nenner CA, CB dieser Brüche gleich sind (gleich der Längenzahl des Radius im Kreise C), so müssen auch die Zähler gleich sein. Aus $C'A' = C'B'$ ... folgt aber, dafs die Punkte A', B' ... auf einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt C' dem Mittelpunkte C entspricht.

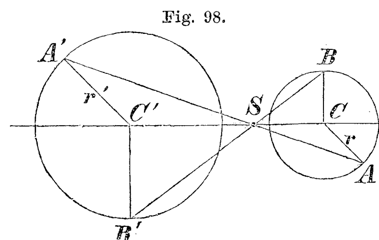
b) Zwei beliebige Kreise können in doppelter Weise als ähnliche Figuren betrachtet werden.

I. Für den innern Ähnlichkeitspunkt, der den Centralabstand innerhalb nach dem Verhältnis der Radien teilt, entsprechen sich die Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Radien.

II. Für den äufsern Ähnlichkeitspunkt, der den Centralabstand aufserhalb nach dem Verhältnis der Radien teilt, entsprechen sich die Endpunkte gleichgerichteter Radien.

Beweis. I. CA und $C'A'$ sind Radien von entgegengesetzter Richtung. Nach § 41 c hat man $SC' : SC = SA' : SA = r' : r$. Hieraus folgt: 1) Die Geraden, welche die Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Radien verbinden, gehen alle durch den Punkt S, welcher den Centralabstand $C'C$ innen nach dem Verhältnis der Radien teilt. 2) Die Abstände der Endpunkte von S stehen immer in dem Verhältnisse $r' : r$. Wenn man also die Endpunkte entgegengesetzt gerichteter Radien als entsprechend ansieht, so liegen die Kreise so in dem Strahlenbüschel, wie es die Definition in § 47 a verlangt, und sind ähnliche Figuren für den innern Ähnlichkeitspunkt S. Ebenso beweist man die Behauptung II.

Fig. 98.

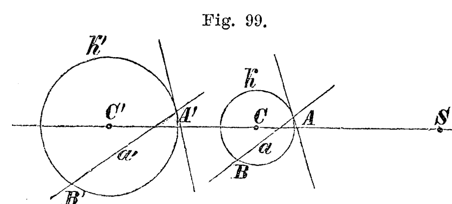


c) Wenn zwei Kreise sich für einen Ähnlichkeitspunkt entsprechen, so entsprechen sich auch die Sekanten mit ihren Schnittpunkten und die Tangenten mit ihren Berührungspunkten paarweise.

Beweis. Wenn ein Punkt auf der Geraden a und dem Kreise k zugleich liegt, so mufs der entsprechende Punkt auf der Geraden a' und dem Kreise k' zugleich liegen (§ 48 a u. § 50 a).

Also entspricht jedem der Schnittpunkte A und B von a mit k ein Schnittpunkt von a' und k'. Fallen aber jene beiden Schnittpunkte auf k in einen Punkt D, so müssen die homologen Punkte auf k' in den entsprechenden Punkt D' fallen, das heifst: einer Geraden a, welche k in D berührt, entspricht eine Gerade a', welche k' im homologen Punkte berührt.

Fig. 99.



Zusatz. Entsprechende Tangenten sind parallel und die zugehörigen Radien sind gleich oder entgegengesetzt gerichtet, je nachdem der Ähnlichkeitspunkt ein äufserer oder innerer ist.

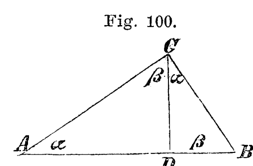
Anmerkung. Zwei Kreise bestimmen auf zweierlei Weise (durch den innern und durch den äufsern Ähnlichkeitspunkt) zwei ähnliche Systeme.

Anwendungen auf das rechtwinklige Dreieck.

a) Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck die Höhe zieht, so ist eine Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt. Die Höhe selbst ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Beweis. In Fig. 100 sind die beiden Winkel α gleich, weil jeder mit dem bei C liegenden Winkel β einen rechten Winkel ausmacht. Ebenso zeigt man, dafs die beiden Winkel β gleich sind. Nun sind 1) die Dreiecke ACB und ADC ähnlich, weil sie die Winkel entsprechend gleich haben. Folglich verhalten sich die Seiten AB und AC des Dreiecks ABC wie die entsprechenden Seiten des andern Dreiecks, welche nun zu suchen sind: AB liegt dem rechten Winkel C gegenüber, folglich entspricht ihr die Seite AC des Dreiecks ADC, weil sie ebenfalls dem rechten Winkel gegenüber liegt. Der Seite AC des Dreiecks ABC aber, welche dem Winkel β gegenüber liegt, entspricht die Gegenseite AD des Winkels β im Dreieck ADC. Daher hat man die Proportion $AB : AC = AC : AD$.

Fig. 100.



2) Die Dreiecke ADC und CDB sind ebenfalls aus Gleich-

heit der entsprechenden Winkel ähnlich. Man findet auf entsprechende Weise:

$$AD : DC = DC : DB.$$

b) Aufgabe. Zu zwei Strecken a und b die mittlere Proportionale x zu suchen, oder die Proportion $a : x = x : b$ zu erfüllen.

1. Auflösung. Man trage von einem Punkte M aus die gegebenen Strecken nach den entgegengesetzten Richtungen einer Geraden (Fig. 101).

Über der hierdurch erhaltenen Strecke NP als Durchmesser errichte man einen Halbkreis. Dann ist das in denselben fallende Stück MQ einer in M errichteten Senkrechten die verlangte mittlere Proportionale.

2. Auflösung. Man trage von einem Punkte M (Fig. 102) einer Geraden aus die gegebenen Strecken nach der nämlichen Richtung auf dieser Geraden ab. Über MN als Durchmesser errichte man einen Halbkreis. Wenn die in P auf MN errichtete Senkrechte denselben in Q trifft, so ist MQ die gesuchte mittlere Proportionale.

Fig. 101.

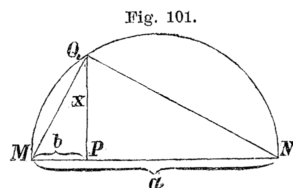
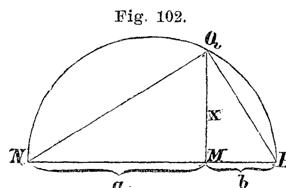


Fig. 102.



Anwendungen auf die Kreislehre. § 52.

a) Wenn man durch einen Punkt P Sekanten eines Kreises zieht, so hat das Produkt der durch diesen Punkt und den Kreis begrenzten Abschnitte für jede Sekante den gleichen Wert (Potenz des Punktes P).

Beweis. 1) AB und CD (Fig. 103) seien die Sehnen, welche auf 2 innerhalb des Kreises sich schneidenden Sekanten liegen. Man beweise mit Hilfe des § 24b die Ähnlichkeit der Dreiecke CPA und BPD nach § 49a), woraus die Proportion $PC : PA = PB : PD$ und die Gleichung $PC . PD = PA . PB$ folgt.

2) AB und CD (Fig. 104) seien 2 Sekanten, die sich aufserhalb des Kreises schneiden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PCB und PAD (§ 24b und § 49a) folgt: $PC : PA = PB : PD$ und $PC . PD = PA . PB$.

b) Zusatz. Wenn der Punkt P innerhalb des Kreises liegt, so ist die Potenz des Punktes P auch durch das

Fig. 103.

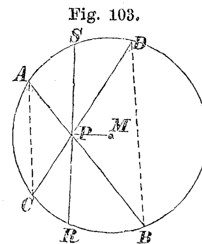
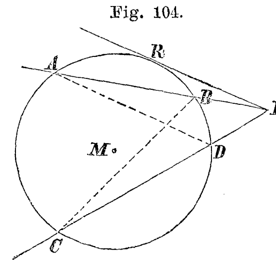


Fig. 104.



Quadrat von der Hälfte der kleinsten Sehne RS dargestellt. Wenn der Punkt P aufserhalb des Kreises liegt, so ist die Potenz des Punktes P gleich dem Quadrate des Tangentenabschnitts PR.

Beweis. Die zu PM senkrechte Sehne RS ist die kleinste der durch P gehenden Sehnen, weil sie den gröfstmöglichen Abstand von M hat (vgl. Übungen, § 6, Üb. 50). Die Abschnitte dieser Sehne sind nach § 26 b, 3 gleich, also ist $PA \,.\, PB = PR^2$. Denkt man sich andererseits die Sekante PA gedreht, bis sie durch Zusammenfallen der Schnittpunkte zur Tangente wird, so bekommt man $PA \,.\, PB = PR \,.\, PR = PR^2$.*)

Anmerkung. Wenn man die Sekantenabschnitte, von welchen in a) die Rede ist, von dem Schnittpunkte der Sekanten aus durchlaufen denkt und nach § 41, Anmerk. die Vorzeichen der Abschnitte und ihrer Produkte bestimmt, so werden diese Produkte positiv oder negativ, je nachdem die Sekanten sich aufserhalb oder innerhalb der Kreise schneiden.

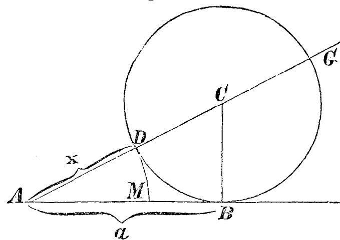
Die Potenz des Punktes P erhält im ersten Fall das positive, im zweiten Fall das negative Vorzeichen, während wir in den vorhergehenden Sätzen das mit dem Namen Potenz bezeichneten, was man bei Berücksichtigung der Vorzeichen nur den absoluten Wert der Potenz nennen kann. Man kann in den beiden Fällen der Figur 103 und der Figur 104 die Potenz durch das Quadrat des Radius r und das Quadrat der Entfernung $MP = d$ ausdrücken. Nimmt man dabei auf das Vorzeichen der Potenz Rücksicht, so findet man, dafs die Potenz immer durch $d^2 - r^2$ dargestellt ist, welcher Ausdruck positiv oder negativ ist, je nachdem P aufserhalb oder innerhalb des Kreises liegt.

*) Dies kann auch in dem Satze ausgesprochen werden: Der Tangentenabschnitt ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Sekantenabschnitten.

c) Eine gegebene Strecke a stetig zu teilen, das heifst sie so zu teilen, dafs der gröfsere Abschnitt x die mittlere Proportionale zwischen der Strecke a und dem Reste $a - x$ ist. $a : x = x : a - x$ oder $x^2 = a(a - x)$.

Auflösung. AB (Fig. 105) sei die gegebene Strecke a. Trage $BC = \frac{a}{2}$ in B senkrecht auf und ziehe um C mit dem Radius CB einen Kreis, der AB in B berühren wird. Verbinde A mit C, so ist das Stück AD der gesuchte Abschnitt x. Die Strecke AB ist stetig geteilt, wenn AD nach AM getragen wird.

Fig. 105.



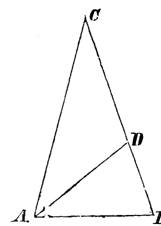
Beweis. Man hat $AB = DG = a$; bezeichnet man AD mit x, so ist $AG = x + a$. Durch Einsetzen dieser Werte in die aus § 52b) sich ergebende Gleichung $AB^2 = AD \, . \, AG$ erhält man $a^2 = x(x + a)$ oder $a^2 = x^2 + x \, . \, a$. Daraus folgt $x^2 = a^2 - x \, . \, a$ oder $x^2 = a(a - x)$.

d) Einen Kreis in 10 gleiche Teile zu teilen oder demselben ein regelmäfsiges Zehneck einzubeschreiben.

Auflösung. Wenn man den Radius stetig teilt, so kann man das gröfsere Stück 10mal als Sehne in den Kreis eintragen.

Beweis. Wenn ACB (Fig. 106) der Winkel der 10-Teilung (36^0) und AB die Zehneckseite ist, so sind die Winkel CAB und CBA beide gleich 72^0. Halbiert man den Winkel bei A durch die Gerade AD, so sind die Dreiecke BAD und ADC gleichschenklig und deshalb die Strecken AB, AD, DC einander gleich. Aufserdem sind die Dreiecke ABD und CBA ähnlich (§ 49a), und es gilt die Proportion: $BD : AB = BA : CB$. Bedenkt man, dafs $AB = CD$, so sieht man, dafs die Zehneckseite gleich dem gröfseren Stücke CD des in D stetig geteilten Radius ist. Nennt man $CB = r$ und $AB = z$, so hat man $r : z = z : r - z$.

Fig. 106.



VII. Abschnitt.

Kreisberechnung.

§ 53. **Aufgaben zur Berechnung regelmäfsiger Vielecke.**

a) Der Radius ($CA = CB = CD = r$) eines Kreises sei gegeben und die Seite ($AB = s$) des einbeschriebenen n-Ecks bereits gefunden*). Man soll die Seite ($AD = BD = s'$) des einbeschriebenen $2n$-Ecks bestimmen.

Fig. 107.

Auflösung. Aus dem Dreiecke CBD bestimmt man die dem spitzen Winkel bei C gegenüberliegende Seite s' nach § 39

$$s'^2 = r^2 + r^2 - 2r \, . \, \varrho = 2r^2 - 2r\varrho,$$
$$s' = \sqrt{2r(r - \varrho)}.$$

Hierin setzt man aus Dreieck CMB den Wert $\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$ für ϱ ein:

$$s' = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}\right)}.$$

b) Der Radius r eines Kreises sei gegeben und die Seite s' des einbeschriebenen $2n$-Ecks gefunden. Man soll die Seite des n-Ecks daraus bestimmen.

Auflösung**). Nennen wir die Höhe CP des Dreiecks ACD (den kleinen Radius des $2n$-Ecks) mit ϱ', so kann der doppelte Inhalt des Dreiecks ACD einerseits durch $AD \, . \, CP$ oder $s' \, . \, \varrho'$, andererseits aber auch durch $CD \, . \, AM$ oder $r \cdot \frac{s}{2}$ ausgedrückt werden. Setzt man nun noch für ϱ' aus dem Dreieck CAP seinen Wert $\sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}$, so hat man durch Gleichsetzung jener Flächen:

$$r \, . \, \frac{s}{2} = s' \, . \sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}$$

---

*) Siehe Übungen 1 und 5 in § 10 der Übungen.

**) s kann auch durch Auflösung der Schlufsgleichung in a) nach s gefunden werden.

oder

$$s = \frac{2s'}{r} \cdot \sqrt{r^2 - \frac{s'^2}{4}}.$$

c) Der Radius r eines Kreises sei gegeben und die Seite s des einbeschriebenen n-Ecks bekannt. Man soll die Seite S des umbeschriebenen n-Ecks finden (in Fig. 107 $GH = S$).

Auflösung. Nach § 41, c hat man

$$GH : AB = CD : CM$$

oder

$$S : s = r : \varrho.$$

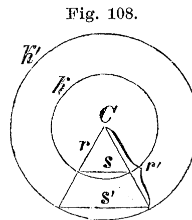
Durch Auflösen nach S und Einsetzen des Wertes für ϱ erhält man:

$$S = \frac{r \cdot s}{\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}}.$$

Die Peripherie des Kreises. **§ 54.**

a) Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Radien. Wenn die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser 1 durch π bezeichnet wird, so ist die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser d durch $\pi \cdot d$ oder $\pi \cdot 2r$ ausgedrückt.

Fig. 108.



Beweis. Man denke durch den gemeinsamen Mittelpunkt der Kreise k, k', n Strahlen gezogen, welche den Winkelraum um C in gleiche Teile teilen. Dadurch entstehen (§ 32 a) auf den Kreisen die Ecken zweier regelmäfsigen n-Ecke, von welchen s und s' zwei Seiten sind. Nach § 41 c verhalten sich diese Seiten wie die Radien r und r'. Aber die Umringe der Vielecke sind das n-fache dieser Seiten, also verhalten auch sie sich wie $r : r'$. Das Gleiche mufs aber für die Peripherien der Kreise selbst gelten, denn wenn der Wert von n bis ins Unbegrenzte wächst, so gehen die Umringe der beiden Vielecke in die Peripherien der Kreise über (§ 33 b).

b) Die Fläche des Kreises ist gleich der Hälfte des Produktes von Peripherie und Radius oder $\pi \cdot r^2$.

Wenn man von einem regelmäfsigen umbeschriebenen Vieleck durch unbegrenzte Vermehrung der Seitenzahl zum Kreise übergeht, so wird der kleine Radius des Vielecks zum Radius des

Kreises und der Satz c) des § 36 geht in die zu beweisende Behauptung über.

Da aber die Peripherie des Kreises den Wert $2\pi r$ hat, so erhält man für die Fläche $2\pi r \frac{r}{2} = \pi r^2$.

c) Zwischen den Schenkeln eines Mittelpunktswinkels von α Grad liegt ein Bogen von der Länge $\frac{\pi r \alpha}{180}$ und ein Stück der Kreisfläche (Sektor) von dem Inhalt $\frac{\pi r^2 \alpha}{360}$.

Beweis. Zu dem Mittelpunktswinkel von 360^0 (als Bogen betrachtet) gehört die ganze Peripherie $2\pi r$ und (als Sektor betrachtet) die ganze Kreisfläche πr^2. Zu dem Winkel von einem Grad gehört daher der Bogen $\frac{2\pi r}{360}$ und der Sektor $\frac{\pi r^2}{360}$. Zu dem Winkel von α Grad gehört aber der Bogen $\alpha \cdot \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r \alpha}{180}$ und der Sektor $\alpha \cdot \frac{\pi r^2}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360}$.

Anmerkung. Die Berechnung desjenigen Flächenstückes, welches von dem Kreise durch eine Sehne abgeschnitten wird, (Segment) kann allgemein nur mit trigonometrischen Hilfsmitteln ausgeführt werden.

§ 55. Berechnung von π.

π ist die Hälfte von der Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 ist. Um π zu berechnen, gehe man von dem halben Umring u des einbeschriebenen regelmäſsigen Sechsecks aus, welcher den Wert 3 hat. Hierauf rechne man nach § 53 c den halben Umring U des umbeschriebenen regelmäſsigen Sechsecks, welcher 3,464 . . . beträgt. Bei fortwährender Verdoppelung der Seitenzahl, also beim Übergange zum 12-Eck, 24-Eck, . . . wird der Umring des einbeschriebenen Vielecks immer gröſser und der des umbeschriebenen Vielecks wird immer kleiner*). Nach § 33 b müssen diese beiden Werte U und u für einen unendlich groſsen Wert von n mit dem halben Umring des Kreises übereinstimmen.

---

*) Beim einbeschriebenen Vieleck wird eine Seite s des n-Ecks durch zwei Seiten des $2n$-Ecks ersetzt, welche nach § 19 a, Folg. zusammen gröſser sind als s. Beim umbeschriebenen Vieleck dagegen wird eine Seite s' des $2n$-Ecks zwischen zwei Seiten des n-Ecks eingeschaltet, und diese Seite s' ist nach § 19 a, Folg. kleiner, als die Summe der durch sie abgeschnittenen Stücke der beiden Seiten des n-Ecks, zwischen welche sie eingelegt wurde.

Es folgt noch eine Tabelle mit 5 Rubriken.

Die Überschriften n, ϱ, U, u, d bezeichnen nacheinander die Seitenzahl der regelmäßsigen Vielecke, den kleinen Radius des einbeschriebenen Vielecks, den halben Umring des umbeschriebenen, den halben Umring des einbeschriebenen Vielecks und die Differenz dieser halben Umringe.

n	ϱ	U	u	d
6	0,866025	3,464101	3,000000	0,464101
12	0,965926	3,215390	3,105828	0,109562
24	0,991445	3,159660	3,132628	0,027032
48	0,997859	3,146086	3,139350	0,006736
96	0,999464	3,142714	3,141032	0,001682

VIII. Abschnitt.

Hilfssätze aus der Arithmetik.

Das Messen der Gröfsen. § 56.

Eine Gröfse a mit einer gleichartigen Gröfse b messen, heifst zusehen, wie oft die Gröfse b (die Einheit) oder ein Bruchteil von b in a aufgeht.

Durch das Messen wird die sogenannte Mafszahl der Gröfse a für die Einheit b gefunden. Die Mafszahl der Gröfse a für die Einheit b ist diejenige Zahl, mit welcher man b multiplicieren mufs, um a zu erhalten.

Dabei sind 3 Fälle zu unterscheiden.

1) Die Einheit b geht $m$mal in a auf (m eine ganze Zahl). Dann ist $a = m \,.\, b$, oder $a = m$mal der Einheit, d. h. die Mafszahl von a ist die ganze Zahl m.

2) Der s^{te} Teil von b geht $r$mal in a auf (r und s sind ganze Zahlen). Dann ist $a = \frac{r}{s} \cdot b$ oder $a = \frac{r}{s}$mal der Einheit; die Mafszahl von a ist der Bruch $\frac{r}{s}$.

3) Es kann kein Teil von b gefunden werden, der eine ganze Anzahl mal in a aufgeht. Wir nehmen an, der s^{te} Teil von b gebe $r$mal genommen noch weniger als a, dagegen $r + 1$mal genommen mehr als a, so dafs

$$\frac{r}{s} \cdot b < a < \frac{r+1}{s} \cdot b.$$

Dann ist die zu suchende Maſszahl gröſser als $\frac{r}{s}$ und kleiner als $\frac{r+1}{s}$ (die Differenz beider Maſszahlen ist $\frac{1}{s}$), und der Fehler, welchen man durch die Annahme dieser beiden Maſszahlen begeht, ist kleiner als $\frac{b}{s}$.

Man kann nun s so groſs nehmen, daſs sowohl die Differenz $\frac{1}{s}$ beider Maſszahlen als auch der gemachte Fehler kleiner ist als jede noch so klein angegebene Zahl. Man sagt in diesem Falle, die gesuchte Maſszahl sei nicht durch einen Bruch angebbar, sei eine „Irrationalzahl", der man durch Brüche mit groſsen Nennern so nahe kommen könne als man will. Die Gröſsen a und b heiſsen in diesem Falle incommensurabel.

§ 57. **Das Verhältnis gleichartiger Gröſsen.**

a) Das Verhältnis der gleichartigen Gröſsen a und b ist diejenige Zahl, mit welcher man b multiplicieren muſs, um a zu erhalten.

Das Verhältnis $a:b$ ist also (§ 56) die Maſszahl von a für den Fall, daſs b als Einheit gewählt wird. Das Verhältnis $a:b$ ist demnach eine ganze Zahl oder ein Bruch oder eine Irrationalzahl, je nachdem der Fall 1) oder 2) oder 3) in § 56 eintritt.

Nehmen wir die ganzen Zahlen als Brüche mit dem Nenner 1 und die Irrationalzahlen als Grenzwerte von Brüchen, so kann ein Verhältnis immer als Bruch betrachtet werden.

§ 58. **Die Proportionen.**

Eine Proportion ist die Gleichung zweier Verhältnisse oder Brüche.

$$r:s=p:q$$

oder

$$\frac{r}{s}=\frac{p}{q}.$$

Anmerkung. Durch die Sätze über Gleichungen beweist man:

1) In jeder Proportion kann man die innern oder die äuſsern Glieder vertauschen.

2) Das Produkt der innern Glieder ist gleich dem Produkte der äuſsern.

3) Ein äuſseres (inneres) Glied wird gefunden, indem man die beiden innern (äuſsern) Glieder multipliciert und durch das bekannte äuſsere (innere) teilt.

4) Aus der Gleichung zweier Produkte kann man eine Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu innern, die des andern zu äufsern Gliedern macht.

Ersetzung der Proportionen durch Gleichungen, welche einen Proportionalitätsfaktor enthalten. § 59.

a) Wenn m und n noch unbestimmte ganze, gebrochene oder irrationale Zahlen vorstellen, so kann man die Proportion $r:s=p:q$ ersetzen

1) durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} r = m\,.\,s \\ p = m\,.\,q \end{array}\right\}, \qquad 1)$$

2) durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} r = n\,.\,p \\ s = n\,.\,q \end{array}\right\}. \qquad 2)$$

Beweis. 1) Setzt man $r:s=m$, so ist auch $p:q=m$. Durch Wegschaffen des Nenners erhält man die Gleichungen 1).

2) Man vertausche die mittlern Glieder, um $r:p=s:q$ zu erhalten. Alsdann setze man $\frac{r}{p}=n$, so mufs auch $\frac{s}{q}=n$ richtig sein. Durch Fortschaffen des Nenners erhält man die Gleichungen 2).

b) Die Gleichungen

$$r:s=p:q=u:v \qquad 3)$$

zwischen mehr als zwei Verhältnissen enthalten mehr als zwei Proportionen:

$$\begin{array}{l} r:s=p:q \\ r:s=u:v \\ p:q=u:v. \end{array} \qquad 4)$$

Durch Vertauschung der mittlern Glieder erhält man die Proportionen:

$$\begin{array}{l} r:p=s:q \\ r:u=s:v \\ p:u=q:v, \end{array} \qquad 5)$$

welche wieder in einer Zeile zu schreiben sind:

$$r:p:u\ldots=s:q:v. \qquad 6)$$

Setzt man nun $r:s=m$, so ist auch $p:q=m$ u. s. w., und man hat durch Wegschaffen der Nenner:

$$r=m\,.\,s;\;\; p=m\,.\,q;\;\; u=m\,.\,v,$$

wodurch die Proportionen 3) oder 6) vollständig ersetzt sind.

§ 60. **Proportionalitätssatz.**

b) Jeder beliebigen Gröfse $a, b, c \ldots$ einer Art soll eine einzige Gröfse a', b', c' einer andern Art bezüglich entsprechen. Dieses Entsprechen soll folgenden Bedingungen unterworfen sein:

I. Wenn die Gröfsen a und b einander gleich sind, so sind auch die entsprechenden Gröfsen a' und b' einander gleich.

II. Der Summe s zweier Gröfsen a und b entspricht die Summe s' der zugehörigen Gröfsen a' und b'.

Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir: Zwei Gröfsen a und b der ersten Art verhalten sich wie die entsprechenden Gröfsen der andern Art, d. h. $a : b = a' : b'$.

Beweis. Aus I und II folgt: Wenn der Gröfse b der ersten Art die Gröfse b' der zweiten Art entspricht, so entspricht

1) dem $m$fachen von b das $m$fache von b'; denn der Summe von m gleichen Summanden b mufs die Summe von m gleichen Summanden b' entsprechen (nach II);

2) entspricht dem s^{ten} Teile von b auch der s^{te} Teil von b', denn einer Gröfse, welche $s$mal als Summand genommen b giebt, mufs die Gröfse entsprechen, welche $s$mal als Summand genommen b' giebt.

Mit Hilfe von 1) und 2) führen wir den Beweis mit Unterscheidung zweier Fälle.

Erster Fall. $a : b = \frac{r}{s}$ (r und s ganze Zahlen; s kann auch gleich 1 sein). Wenn $a : b = \frac{r}{s}$, so ist auch

$$a = \frac{r}{s} \cdot b = r \cdot \frac{b}{s}.$$

Nun entspricht nach 2) der Gröfse $\frac{b}{s}$ die Gröfse $\frac{b'}{s}$ und nach 1) entspricht der Gröfse $r \cdot \left(\frac{b}{s}\right)$ die Gröfse $r \cdot \left(\frac{b'}{s}\right)$. Also hat man $a' = r \cdot \frac{b'}{s} = \frac{r}{s} \cdot b'$ oder $a' : b' = \frac{r}{s}$. Die Verhältnisse $a : b$ und $a' : b'$ sind gleich, weil sie beide den Wert $\frac{r}{s}$ haben.

Zweiter Fall. a und b seien inkommensurabel. Man kann das gesuchte Verhältnis $a : b$ zwischen den Grenzen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r+1}{s}$ einschliefsen (§ 56). Dann hat man die aufsteigende Reihe

$$\frac{r}{s} \cdot b < a < \frac{r+1}{s} \cdot b.$$

Diesen Gröfsen entsprechen in ebenfalls aufsteigender Reihe (siehe die Anmerkung):

$$\frac{r}{s} \cdot b' < a' < \frac{r+1}{s} \cdot b'.$$

Hieraus schliefst man (§ 56), dafs auch das Verhältnis $a' : b'$ zwischen den Grenzen $\frac{r}{s}$ und $\frac{r+1}{s}$ liegt.

Wenn aber die Verhältnisse $a : b$ und $a' : b'$ für beliebig wachsende Werte von s zwischen diesen Grenzen liegen, so sind sie einander gleich (§ 56, 3).

Anmerkung. Aus II. folgt, dafs wenn eine Gröfse der einen Art wächst, die entsprechende Gröfse der zweiten Art auch wachsen mufs.



Übungen.

Mit zwei lithographierten Tafeln.

Übungen zu Abschnitt I (die Grundgebilde)*). § 1.

1) α) Sind Nebenwinkel immer supplementär? Sind Supplementwinkel immer auch Nebenwinkel?

β) Nebenwinkel (Supplementwinkel) von gleichen Winkeln sind gleich.

2) Welches sind die Supplementwinkel zu 30^0, 45^0, 90^0, 120^0, $44^0\ 20'\ 31''$, $90^0\ 3'\ 20''$, $120^0\ 15'\ 30''$?

3) Komplementwinkel von gleichen Winkeln sind auch gleich.

4) Welches sind die Komplementwinkel zu 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, $10^0\ 20'\ 30''$, $30^0\ 44'\ 54''$, $70^0\ 13'\ 24''$?

5) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine doppelt so grofs als der andere ($\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ vom andern); wie grofs ist jeder?

6) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine um 20^0 (30^0, 40^0, $30'$, x^0) gröfser als der andere; wie grofs ist jeder?

7) Winkel BMC in Fig. 1 auf Seite 1 betrage 55^0 (x^0); wie grofs sind die übrigen Winkel der Figur?

Nimm an, dafs die Halbierungslinie von BMC gezogen und nach rückwärts verlängert sei. Bestimme ebenfalls alle Winkel der Figur. Folgere, dafs die Rückverlängerung den Winkel AMD halbiert.

7 α) $\sphericalangle\, CMB$ in Fig. 1 auf Seite 1 betrage 60^0 (x^0); $\sphericalangle\, CMB$ und sein Scheitelwinkel seien halbiert. Bestimme die Winkel der Figur und folgere, dafs die beiden Halbierungslinien in eine Gerade fallen.

8) Von einem Punkte gehen vier Richtungen aus. Zwei der entstandenen Winkel, welche nicht benachbart sind, mögen 35^0 (x^0)

---

*) Die Anführungen von Paragraphen des „Leitfadens I. Teil" und solchen der „Übungen zum I. Teil des Leitfadens" unterscheiden sich zum Teil von selbst durch die angehängten Buchstaben oder Zahlen. Z. B. § 6 a bezieht sich auf den Leitfaden, § 2, Üb. 3 auf die Übungen. Wo es dagegen nötig scheint, findet sich bei dem Hinweis auf den Leitfaden der ebenen Geometrie der Buchstabe G. vorausgesetzt. Wenn auf Figuren im Texte des Leitfadens hingewiesen wird, so ist die Seitenzahl dabeigesetzt. Anführungen von Figuren ohne Seitenzahl beziehen sich auf die Tafeln, welche diesen Übungen beigegeben sind.

betragen. Die übrigen beiden Winkel seien gleich und sollen bestimmt werden. Folgere, daſs je zwei jener Richtungen in eine Gerade fallen.

9) Der eine von zwei Nebenwinkeln betrage 26^0 (x^0). Beide Nebenwinkel seien halbiert. Bestimme die Winkel der Figur und folgere, daſs die Halbierungslinien aufeinander senkrecht stehen.

10) α) Alle Punkte der Symmetrieachse a (Fig. 5 auf Seite 3) entsprechen sich selbst.

β) Alle Geraden, welche auf der Symmetrieachse a senkrecht stehen, entsprechen sich selbst.

11) Die Figur, welche aus zwei auf einander senkrechten Geraden besteht, ist für jede dieser Geraden symmetrisch.

12) Die Figur 8 auf Seite 5, welche aus zwei sich schneidenden Geraden besteht, ist symmetrisch für jede der beiden Geraden, welche einen Winkel und den zugehörigen Scheitelwinkel halbiert. (Zwei zu einander senkrechte Symmetrieachsen.)

13) Wie leitet man aus 12 den Satz d) des § 5 ab? Andeutung. Zwei Scheitelwinkel sind durch die eine Symmetrieachse halbiert. Die Hälften entsprechen sich für die andere Symmetrieachse und sind gleich.

14) Alle durch A in Fig. 6 auf Seite 4 gehenden Strahlen entsprechen sich selbst.

15) Die Figuren in 11) und 12) sind symmetrisch für den Schnittpunkt der Geraden als Centrum. Wie leitet man aus dieser Bemerkung einen Beweis des Satzes über Scheitelwinkel her?

16) α) Zwei Gerade, die auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel.

β) Wenn von zwei parallelen Geraden die eine auf einer dritten Geraden senkrecht steht, so thut es auch die andere.

17) In § 6 α) wurde bewiesen, daſs zwei verschiedene Richtungen sich für die Halbierungslinie ihres Winkels symmetrisch entsprechen. Man beweise nun, daſs zwei Parallelen b, b' sich für die Halbierungslinie des eingeschlossenen Streifens entsprechen. Andeutung. Man schneide b und b' (Fig. 1) durch eine zu beiden senkrechte Gerade (Üb. 16 β) in den Punkten B und B', halbiere BB' in A und ziehe a zu BB' senkrecht, somit parallel zu b und b' (Üb. 16 α). Durch das Umklappen um a vertauschen B und B', sowie die rechten Winkel β und β' ihre Stelle. Also entsprechen sich b und b' für die Achse a. Jede zur Achse senkrechte Gerade schneidet b und b' in entsprechenden Punkten C und C', so daſs D die Mitte von CC' ist. Deshalb heiſst die Gerade a die Halbierungslinie des Streifens bb'.

18) Man beweise auch, daſs eine Symmetrieachse von b und b' keine andere Linie als die Halbierungslinie des Streifens bb'

sein kann. Andeutung. Wenn die Achse a von b getroffen würde, so müfste sie nach dem Beweis zu § 6 α) von der entsprechenden Geraden in demselben Punkte getroffen werden, was unmöglich ist, weil $b \parallel b'$. Also mufs a mit b und b' parallel sein. Zieht man aber eine zu a, b, b' senkrechte Gerade, welche sich selbst entspricht und die Schnittpunkte A, B, B' liefert, so müssen B und B' entsprechende Punkte sein. AB und AB' müssen folglich als entsprechende Strecken gleich sein.

19) a (Fig. 2) sei die Symmetrieachse (Halbierungslinie) des von den Parallelen b und b' gebildeten Streifens. Man beweise, dafs jede in den Streifen gelegte Strecke CC' von a in ihrem Mittelpunkte A getroffen wird. Andeutung. Ziehe durch den Schnittpunkt A die Gerade BB' senkrecht auf a. B und B' entsprechen sich für die Achse a. b und b' entsprechen sich nun auch für A als Mittelpunkt, und die Gerade CC' entspricht sich selbst für diesen Mittelpunkt. Folglich sind C und C' entsprechend für A und $AC = AC'$.

20) Die Symmetrieachse a (Fig. 3) und zwei entsprechende Punkte B, B' seien gegeben. Man soll zu einem weitern Punkte C den entsprechenden mit dem Lineal allein konstruieren. Andeutung. Ziehe CB und CB', um die Punkte A und E zu erhalten. Wie nun C der Schnittpunkt von AB und EB' ist, so ist der gesuchte Punkt C' Schnittpunkt der homologen Geraden AB' und EB.

21) Unter den Voraussetzungen von 20) soll man zu einer gegebenen Geraden b die entsprechende mit dem Lineal allein konstruieren. Andeutung. Man konstruiere zu zwei Punkten von b die homologen Punkte nach 20). Als den einen dieser Punkte kann man auch den Schnittpunkt von b mit der Achse nehmen.

22) Das Centrum A (Fig. 4) der Symmetrie und zwei entsprechende Geraden b, b' sind gegeben. Man soll zu einer weitern Geraden c die entsprechende mit dem Lineal allein finden. Andeutung. Man bestimme durch die Geraden MA und NA (Fig. 4) die Punkte M' und N', welche jenen bezüglich entsprechen. $M'N'$ ist die gesuchte Gerade.

23) Unter den Voraussetzungen von 22) soll man zu einem beliebigen Punkte P den entsprechenden suchen. Andeutung. Man suche zu zwei durch P gezogenen Geraden die homologen Geraden nach 22) und erhält den gesuchten Punkt als ihren Schnittpunkt. Der Einfachheit halber kann man eine dieser Geraden durch A ziehen.

---

§ 2. Übungen zu Abschnitt II (allgemeine Eigenschaften der Figuren).

Man soll

1) für die Figur 22 auf Seite 10, ohne die Zeichnung anzusehen, auf alle möglichen Weisen nennen: α) Zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel, β) eine Seite und die anliegenden Winkel, γ) zwei Seiten und den Gegenwinkel der einen, δ) zwei Winkel und die Gegenseite des einen. Andeutung. α) ab und γ oder bc und α u. s. w.

2) Umgekehrt soll man drei beliebige unter den Buchstaben der Figur 22 auf Seite 10 nennen und die Lage der Stücke angeben, ohne auf die Zeichnung zu sehen.

3) Bei der Stellung von Aufgaben über die Konstruktion von Dreiecken werden folgende Bezeichnungen benützt werden:

Die Senkrechten, welche von A, B, C bezüglich auf die gegenüberliegenden Seiten a, b, c gefällt werden können, heifsen „Höhen" des Dreiecks und werden der Reihe nach mit h', h'', h''' bezeichnet. Mit h' bezeichnet man auch zugleich die Länge der Strecke, welche von A bis zum Fufspunkte der Höhe h' reicht. Wenn man eine einzige dieser Höhen, z. B. h''' in Betrachtung zieht, so nennt man die zugehörige Seite c des Dreiecks die „Grundlinie". Die beiden Abschnitte PA und PB (Fig. 5), welche die Höhe h''' auf der Seite c erzeugt, werden mit q''' und p''' bezeichnet; p''' ist die „Projektion" der Seite a auf c und q''' ist die Projektion von b auf c. Die Bezeichnung ist auf diese Weise der alphabetischen Reihenfolge entsprechend; denn p''', q''' gehören der Reihe nach zu a, b. Was werden nun die Bezeichnungen p', q', p'', q'' bedeuten? Bemerke auch, dafs je zwei der Abschnitte p', p'', p''' durch einen der Abschnitte q', q'', q''' getrennt sind. Die Strecken, welche auf den Halbierungslinien der Winkel α, β, γ von einem Eckpunkte des Dreiecks bis zu ihrem Schnittpunkte mit der gegenüberliegenden Seite reichen, heifsen w', w'', w'''. Die Winkelhalbierende w''' erzeugt auf AB die Abschnitte DA und DB (Fig. 56), welche v''' und u''' genannt werden. Was bedeuten nun u', u'', v', v''? Je zwei Abschnitte u sind durch einen Abschnitt v getrennt. Die Strecken, welche von den Ecken A, B, C bis zu den Mittelpunkten der Seiten a, b, c reichen, heifsen t', t'', t'''. Mittelpunkt und Radius heifsen M und r bei dem umbeschriebenen Kreise, O und ϱ bei dem einbeschriebenen Kreise, O''' und ϱ''' bei dem anbeschriebenen Kreise, welcher die Seite c innerhalb und die Seiten a, b in der Verlängerung berührt. Statt h''', p''', u''' schreibt man

oft nur h, p, u. $\sphericalangle\, tc$ bedeutet also einen Winkel zwischen t''' und c. c ist in dem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich sind, z. B. $a = b$, heifst gleichschenkliges Dreieck. Die Seite c wird als „Grundlinie" und C als „Spitze" bezeichnet. Die Ecken und Seiten des Vierecks werden bei den Übungen bezeichnet, wie Fig. 18 zeigt. Die Winkel des Vierecks bei A, B, C, D heifsen α, β, γ, δ; die Diagonalen AC und BD heifsen e und f. Der Schnittpunkt der Diagonalen heifst E, ein Winkel daselbst ε.

4) Eine Höhe des Dreiecks trifft entweder die Grundlinie selbst, oder nur ihre Verlängerung. Im ersten Falle sind die Winkel an der Grundlinie beide spitz, im zweiten Falle ist einer derselben stumpf. Andeutung. (Fig. 5.) Zwei in den Endpunkten der Grundlinie errichtete Senkrechte bestimmen einen Streifen. Die Höhe und daher auch der dritte Eckpunkt des Dreiecks fällt innerhalb oder aufserhalb des Streifens, je nachdem der erste oder zweite Fall in 4) eintritt. Alsdann zeigt die Anschauung, dafs im ersten Falle beide Winkel an der Grundlinie kleiner als ein rechter sind, während im zweiten Falle der eine dieser Winkel gröfser als ein rechter ist.

5) In G. § 3 traten noch keine geschlossenen Figuren als entsprechend auf. Nimmt man in Fig. 5 auf Seite 3 noch einen Punkt C der Achse hinzu, so entstehen Dreiecke ABC und $AB'C$ (Fig. 6), deren Ecken und Seiten sich paarweise entsprechen und welche durch Umklappen zur Deckung gebracht werden können.

6) In G. § 4 wurden noch keine geschlossenen Figuren betrachtet. Nimmt man in Fig. 6 auf Seite 4 noch eine sich selbst entsprechende Gerade (die durch A geht) hinzu, so entstehen Dreiseite abc und $a'bc$ (Fig. 7), deren Seiten und Ecken sich paarweise entsprechen, welche daher durch eine halbe Umdrehung zur Deckung gebracht werden können.

7) Man beobachte, dafs in den Dreiecken der Fig. 6 die entsprechenden Winkel entgegengesetzten Sinnes sind. (G. § 2 Anmerkung.)

8) Der Sinn eines Winkels ändert sich nur durch Umwenden desselben, nicht aber durch Verschieben und Drehen in der Ebene.

9) Der Sinn eines Dreiecks (§ 10, Anmerk.) ändert sich nur durch Umwenden desselben, nicht aber durch Verschieben und Drehen in der Ebene.

10) Dreiecke, welche sich decken, sind gleichen Sinnes. Dreiecke entgegengesetzten Sinnes (z. B. die Dreiecke in Fig. 6) können nie zur Deckung gebracht werden, ohne dafs man das eine umklappte.

11) Die Winkel der Dreiecke in Fig. 7 und die Dreiecke selbst sind gleichen Sinnes.

12) Man gebraucht oft noch eine andere Art, den Sinn entsprechender Dreiecke zu bestimmen: Man denke sich zwei Zuschauer, welche die Umringe der Dreiecke so durchlaufen, daſs sie sich gleichzeitig in entsprechenden Ecken befinden. Dreiecke sind auch gleichen Sinnes oder nicht, je nachdem die Zuschauer die Flächen der umgangenen Dreiecke auf der gleichen Seite (d. h. beidemal rechts oder beidemal links) liegen haben oder nicht.

13) Wie groſs sind die Winkel α, β, γ eines Dreiecks, wenn α) $\alpha = \beta = \gamma$; β) $\beta = \gamma$ und $\alpha = 36^0$; γ) $\beta = \gamma = \frac{\alpha}{2}$; δ) $\beta = \gamma = 2 \,.\, \alpha$?

14) α) In Fig. 25 auf Seite 11 sei $\alpha = 70^0$, $\beta = 50^0$. Berechne alle Winkel der Figur; welcher der Winkel bei D ist der gröſsere?

β) In einem rechtwinkligen Dreieck ($\gamma = 90^0$) sei die Höhe h gezogen (§ 2, Üb. 3). Der Winkel α betrage 32^0 (x^0); berechne die Winkel der Figur.

γ) In einem gleichschenkligen Dreieck (§ 2, Üb. 3) betrage ein Winkel an der Grundlinie 55^0 (x^0); berechne den Auſsenwinkel an der Spitze ($= 2\,x$).

δ) In einem Dreieck sei $t''' = c : 2$ und $\alpha = 48^0$ (x^0). Bestimme die übrigen Winkel der Figur.

ε) In dem gleichschenkligen Dreieck in Fig. 106 auf Seite 61 ist $\gamma = 36^0$ und AD ist die Halbierungslinie von α. Beweise, daſs die Dreiecke ADB und ADC gleichschenklig sind.

15) In einem Dreieck sei $\gamma = 66^0$ (x^0). Berechne $\alpha + \beta$, $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ und zuletzt den Winkel AOB (Fig. 38 auf Seite 23), welchen w' und w'' mit einander bilden $\left(= 90 + \frac{x}{2}\right)$.

16) In dem gleichschenkligen Dreieck (§ 2, Üb. 3) ist die Halbierungslinie des Auſsenwinkels an der Spitze mit der Grundlinie parallel. Beweise auch die Umkehrung.

17) Beweise die letzte Behauptung in § 12 c auch für den Fall, daſs die schiefen Linien auf verschiedenen Seiten der Senkrechten liegen (durch Umklappen der einen Seite um die Senkrechte).

18) Beweise in Fig. 8, daſs $\sphericalangle ADB > ACB$.

19) Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck ein Winkel wächst, so wächst auch die gegenüberliegende Kathete und die anliegende Kathete nimmt ab. Andeutung. Wenn der Winkel γ (Fig. 9) gewachsen ist, so hat der Winkel α abgenommen. Man zeige, daſs AB' und CB sich notwendig schneiden müssen. Nun

ist Winkel $ABB' > 90^0$, folglich $c' > c$. Ebenso ist Winkel $CB'B > 90^0$, also $a > a'$.

20) Zwei Paare B, B' und C, C' (Fig. 10) von Punkten, die sich für die Achse a symmetrisch entsprechen, bestimmen ein symmetrisches vollständiges Viereck. Die Gegenseiten BC und $B'C'$ sind entsprechend und schneiden sich auf der Achse im Nebeneck D. Die Achse halbiert den Winkel BDB' dieser Gegenseiten. Dasselbe gilt für die Gegenseiten BC' und $B'C$. Jede der Gegenseiten BB' und CC' entspricht sich selbst. Das unendlich ferne Nebeneck entspricht sich ebenfalls selbst, da man jeder Geraden nur einen unendlich fernen Punkt zuschreibt. Die Abstände BB' und CC' werden von der Achse senkrecht halbiert.

21) Man betrachte das einfache symmetrische Viereck $CC'B'B$ in Fig. 10. Es hat die Seiten BB' und CC' parallel (§ 1, Üb. 16 α), während die Seiten CB und $C'B'$ im allgemeinen nicht parallel, aber gleich sind. Dies Viereck wird gleichschenkliges Trapez*) genannt. Man soll die Lage der Symmetrieachse a gegen die Stücke des Trapezes nach Üb. 20 angeben.

22) Zwei Paare, b, b' und c, c' (Fig. 11) von Geraden, die sich für die Achse a symmetrisch entsprechen, bestimmen ein symmetrisches vollständiges Vierseit. Die Gegenecken M und M' sind entsprechend, ihr Abstand wird von der Achse senkrecht halbiert. Die Diagonale MM' entspricht sich selbst. Das Gleiche gilt von den Gegenecken NN' und der sie verbindenden Diagonale. Jede der Gegenecken O und P entspricht sich selbst. Die Diagonale OP ist die Symmetrieachse und entspricht sich ebenfalls selbst. Die Winkel bei O und P werden von der Symmetrieachse halbiert.

23) Man betrachte das einfache Vierseit, welches die Seiten cc', bb' hat, und dessen Ecken M, P, M', O sind. Dies Vierseit hat zwei Paare OM, OM' und PM, PM' gleicher Nachbarseiten. Ein solches Viereck wird Deltoïd genannt.

Man soll die Lage der Symmetrieachse gegen die Stücke des Vierseits nach Üb. 22 angeben.

24) (Fig. 12.) Zwei Paare B, B' und C, C' von Punkten, die sich für das Centrum A symmetrisch entsprechen, bestimmen ein für A symmetrisches vollständiges Viereck. Die Gegenseiten BC und $B'C'$ entsprechen sich und führen auf ein unendlich weit entferntes Nebeneck (sind parallel, vgl. G. § 9). Dasselbe gilt von den Gegenseiten BC' und $B'C$. Jede der Gegenseiten BB' und CC' entspricht sich selbst. Das Nebeneck, in dem sie

*) Trapez heifst ein Viereck, welches zwei parallele und zwei konvergente Seiten hat.

sich schneiden, ist das Centrum der Symmetrie und entspricht sich selbst. Wie kann man auch die unendlich fernen Nebenecken als sich selbst entsprechend ansehen?*) Die Abstände BB' und CC' werden durch A halbiert.

25) Man betrachte das für A symmetrische einfache Viereck $BCB'C'$ (Fig. 12). Es hat die Seiten BC und $B'C'$, sowie BC' und $B'C$ parallel (§ 8 c). Das Viereck wird Parallelogramm genannt (G. § 28). Man soll nach Üb. 24 die Lage des Centrums A gegen die Stücke des Vierecks angeben.

26) Zwei Paare b, b' und c, c' von Geraden, welche sich für das Centrum A symmetrisch entsprechen (Fig. 13), bestimmen ein für A symmetrisches vollständiges Vierseit.

Die Gegenpunkte M und M' entsprechen sich. Der Abstand MM' wird von A halbiert. Das Gleiche gilt von den Gegenpunkten N, N'. Aufserdem sind noch zwei unendlich ferne Gegenpunkte vorhanden. Sie entsprechen sich selbst. Die Diagonalen MM' und NN' des vollständigen Vierseits entsprechen sich selbst. Die Lage der dritten Diagonale ist nicht anzugeben, denn sie enthält zwei unendlich ferne Punkte, während jede Gerade von angebbarer Lage nach unserer Anschauung nur einen unendlich fernen Punkt enthält**). Jede durch A in das Vierseit eingelegte Strecke PP' hat in A ihren Mittelpunkt.

27) Man betrachte das einfache Vierseit in Fig. 13, dessen Seiten b, b', c, c' und dessen Ecken M, M', N, N' sind. Es ist mit dem in Übung 25***) betrachteten Viereck identisch

---

*) Anmerkung. Jeder unendlich ferne Punkt entspricht sich selbst für das Centrum C. — Aus stereometrischen Gründen (Abbildung einer Ebene auf eine andere durch die Perspektive — Horizontlinie — Fluchtpunkte) sieht man die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte einer Ebene als Punkte einer Geraden an (unendlich ferne Gerade). Für das Centrum A entsprechen sich die Strahlen des Büschels A und die Punkte der unendlich fernen Geraden selbst. Für eine Achse a entsprechen sich die Punkte der Achse und die zu a senkrechten Strahlen selbst. Diese Strahlen können als Strahlen eines Büschels mit unendlich fernem Scheitel betrachtet werden. Die achsiale und die centrische Symmetrie sind besondere Fälle der sogenannten involutorischen Verwandtschaft. In dieser letzteren ist ein Centrum A und eine Axe a vorhanden. Die Strahlen des Büschels A und die Punkte der Achse a entsprechen sich selbst. Rückt der Punkt A in unendliche Ferne, so entsteht die achsiale Symmetrie. Rückt die Achse a in unendliche Ferne, so entsteht die centrische Symmetrie.

**) Anmerkung. Es ist die sich selbst entsprechende unendlich ferne Gerade (siehe die Anmerkung zu Übung 24).

***) Anmerkung. Bei der achsialen Symmetrie haben wir als symmetrisches einfaches Viereck (gleichschenkliges Trapez) und symmetrisch einfaches Vierseit (Deltoïd) verschiedenartige Figuren erhalten. Dies ist bei der centrischen Symmetrie nicht der Fall, weil wir die

(Parallelogramm). Man gebe nach Übung 26 die Lage des Punktes A gegen die Stücke der Figur an.

28) Von einem einfachen Vieleck sei bekannt, dafs seine Winkel gleich sind. Wie grofs sind diese Winkel, wenn das Vieleck 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 Seiten hat? Andeutung. Berechne zuerst die gemeinsame Gröfse der Aufsenwinkel ($360^0 : n$) und die Vieleckswinkel als deren Supplemente.

29) α) In einem Viereck sei $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$ (siehe § 2, Üb. 3). Berechne die Winkel, wenn $\alpha = 60^0$ (x^0). Beweise, dafs $a \parallel c$ und $b \parallel d$.

β) In einem Viereck ist $\alpha = \beta$ und $\gamma = \delta$. Berechne die Winkel, wenn $\alpha = 54^0$ (x^0). Beweise, dafs $a \parallel c$. Wieviel Grad mufs α haben, damit auch b und d parallel seien?

γ) In einem Viereck sei $\alpha = 110^0$ und β doppelt so grofs als δ. Die Diagonale BD halbiere die Winkel β und δ. Man berechne alle Winkel der Figur.

30) In einem Viereck seien je zwei Gegenseiten parallel. Berechne die Winkel, wenn $\alpha = 40^0$ (90^0, x^0).

31) α) Alle Kreise, welche durch einen Punkt A gehen und den Mittelpunkt auf einer Geraden b haben, gehen noch durch einen zweiten Punkt A'.

β) Alle Kreise, welche eine Gerade a berühren und den Mittelpunkt auf einer andern Geraden b haben, berühren noch eine andere Gerade a' (Symmetrie des Kreises für jeden Durchmesser).

32) An einen Kreis eine Tangente zu legen, welche α) mit einer gegebenen Geraden a parallel ist, β) mit einer gegebenen Geraden einen bestimmten Winkel β bildet.

γ) Mit gegebenem Radius r einen Kreis beschreiben, welcher eine Gerade a in einem bestimmten Punkte A berührt.

33) Es giebt nur einen Kreis, welcher durch zwei Punkte A und B geht und in A die Gerade a berührt. Andeutung. Der Mittelpunkt eines solchen Kreises mufs der in A auf a errichteten Senkrechten und der Mittelsenkrechten von AB angehören (§ 20, a und c). Zeige, dafs der Schnittpunkt dieser Linien wirklich Mittelpunkt eine solchen Kreises ist.

34) Es giebt zwei Kreise, welche die Geraden a und b berühren, wenn die Berührung von a in einem bestimmten Punkte A stattfinden soll.

---

einfachen Vierseite mit unendlich fernen Ecken von der Untersuchung ausschliefsen. Hätte man unter den einfachen Vierseiten, welche in dem für die Achse a symmetrischen Vierseit Fig. 11 enthalten sind, dasjenige mit den Ecken $MM'NN'$ gewählt, so würde die Figur auch mit dem einfachen symmetrischen Viereck (Trapez) identisch gewesen sein.

35) Den geometrischen Ort für die Mittelpunkte der Kreise zu bestimmen, welche, mit dem Radius r beschrieben, durch den Punkt A gehen.

36) α) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise c, welche den Kreis k in dem Punkte A berühren? Andeutung. Die Gerade, welche das Centrum von k mit A verbindet, ist nach § 17 b) die Centrale beider Kreise.

β) Welches ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher mit dem gegebenen Halbmesser (Radius) h beschrieben ist und den Kreis a (Halbmesser r) von aufsen berührt? Andeutung. Ein Kreis, der mit dem Radius $r + h$ um den Mittelpunkt von a beschrieben ist.

γ) Wie heifst die Antwort zu β), wenn die Berührung von innen stattfinden soll?

δ) Einen Kreis zu zeichnen, welcher, mit dem Radius h beschrieben, zwei Kreise a und b von den Radien r und r' berührt, wenn

1) a von aufsen und b von innen,
2) a von innen und b von aufsen,
3) a und b von aufsen,
4) a und b von innen

berührt werden sollen.

37) α) Jeder Kreis c, der den Kreis k in A berührt, wird in demselben Punkte die Tangente a des Kreises k berühren und umgekehrt.

38) α) Einen Kreis c zu zeichnen, welcher den Kreis k in A berührt und aufserdem durch den Punkt B geht.

β) Einen Kreis zu zeichnen, welcher den Kreis k in dem Punkte A und aufserdem noch eine Gerade b berührt. Andeutung. Siehe Übung 37.

39) Die Figur zweier Kreise und ihrer gemeinschaftlichen Tangenten ist symmetrisch für die Centrale beider Kreise.

40) An zwei Kreise die äufsern gemeinschaftlichen Tangenten (diejenigen, bei welchen die Kreise auf derselben Seite liegen) zu legen. Andeutung. Man ziehe mit der Differenz der Radien um den Mittelpunkt des gröfseren Kreises einen neuen Kreis und lege durch den Mittelpunkt des kleinern Kreises Tangenten an denselben.

41) An zwei Kreise die innern gemeinschaftlichen Tangenten zu zeichnen. (Verwende die Summe der beiden Radien.)

42) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise von gleichen Radien berühren? (§ 20 a.)

43) Einen Kreis c zu konstruieren, welcher zwei Kreise k

und k' von gleichen Radien, und zwar den einen k in einem bestimmten Punkte A berührt. (Übung 36 α und 42.)

44) Einen Kreis c zu konstruieren, welcher die Gerade a in einem bestimmten Punkte A und aufserdem einen Kreis k' berührt. Andeutung. Ersetze a durch einen Kreis k, welcher mit k' gleichen Radius hat und die Gerade a in A berührt. Ein Kreis c, welcher k in A berührt, wird dann von selbst auch die Gerade a in diesem Punkte berühren. (2 Lösungen, weil der Kreis k auf beiden Seiten der Geraden angenommen werden kann.)

45) Einen Kreis c zu konstruieren, welcher zwei beliebige Kreise k und k', und zwar den ersten in einem bestimmten Punkte A berührt. Andeutung. Ersetze wieder den Kreis k durch einen andern, welcher k in A berührt. (Zwei Lösungen.)

46) α) Wenn in einem Viereck $a = b$ und $c = d$, so wird es durch die Diagonale BD in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs BD die Winkel β und δ halbiert und dafs $\alpha = \gamma$.

β) Wenn in einem Dreieck $a = b$, so wird dasselbe durch t''' in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs γ durch t''' halbiert wird, dafs $\alpha = \beta$ und dafs t''' mit c gleiche (rechte) Winkel bildet.

γ) Wenn in einem Viereck $a = c$ und $b = d$, so wird es durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs die Diagonale AC mit a und c gleiche Winkel bildet. Folgere hieraus wiederum, dafs $a \parallel c$. Beweise auf entsprechende Weise, dafs $b \parallel d$.

47) α) Ein Viereck wird durch die Diagonalen in vier Dreiecke geteilt. Wenn die Diagonalen einander halbieren, so sind diese Dreiecke paarweise kongruent. Folgere daraus, dafs AC mit a und c gleiche Winkel bildet und dafs $a \parallel c$. Beweise auch, dafs $b \parallel d$.

β) Wenn in einem Dreieck t''' auf c senkrecht steht, so wird es durch diese Linien in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere, dafs $a = b$, $\alpha = \beta$.

γ) In einem Dreieck sei $a = b$. Die Halbierungslinie von γ teilt das Dreieck in zwei kongruente Dreiecke. Folgere, dafs diese Halbierungslinie die Seite c in der Mitte trifft.

48) α) Wenn in einem Dreieck $a = b$, so wird dasselbe durch die Höhe h''' in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

β) Wenn in einem Viereck $a = d$ und $\beta = \delta = 90^0$, so wird dasselbe durch die Diagonale AC in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

γ) In einem Dreieck sei $a = b$ und infolge dessen $\alpha = \beta$ nach § 12 b. Verbinde C mit einem Punkte D von AB, welcher nicht in der Mitte von AB liegt. Die Dreiecke haben drei

Stücke entsprechend gleich: $a = b$, $\alpha = \beta$, $CD = CD$. Trotzdem sind dieselben nicht kongruent. Vergleiche § 19 d.

49) α) Wenn die Winkel α und γ eines Vierecks von der Diagonale AC halbiert werden, so wird das Viereck durch AC in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

β) Wenn in einem Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, so wird es durch jede Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

50) Wenn in einem Dreieck $\alpha = \beta$, so wird dasselbe durch die Halbierungslinie des Winkels γ in zwei kongruente Dreiecke geteilt. Folgere daraus, dafs $a = b$.

51) Durch den Punkt A eine Parallele zu einer Geraden a zu ziehen (ohne Hilfe des Winkelmessers mit § 19 b).

52) Die Summe der Strecken DA und DB (Fig. 8), welche den Punkt D im Innern des Dreiecks ABC mit den Endpunkten einer Seite verbinden, ist kleiner als die Summe der übrigen Seiten. Andeutung. Ersetze in dem gebrochenen Wege ACB das Stück ACE durch das kürzere AE und in dem abgekürzten Wege AEB wieder das Stück DEB durch das kürzere DB.

53) Wenn man einen Punkt im Innern des Dreiecks durch die Strecken m, n, p mit den Ecken verbindet, so ist

$$m + n + p > \frac{a + b + c}{2}, \text{ aber } m + n + p < a + b + c.$$

54) α) In einem Viereck mit hohlen Winkeln ist die Summe der Diagonalen gröfser als die Summe zweier Gegenseiten.

β) Wenn in einem Dreieck ein Winkel wächst, während die einschliefsenden Seiten gleich bleiben, so wächst auch die gegenüberliegende Seite. Andeutung. Man benutze die Figur 9, indem man voraussetzt, dafs a' und a gleich seien. Wenn der Winkel γ gewachsen ist, so mufs ein anderer Winkel, es sei der Winkel α, abgenommen haben. Legt man die Dreiecke mit der Seite AC aneinander, so müssen AB' und CB sich notwendig schneiden (in O). Dann ist nach α): $c' + a > c + a'$; weil aber $a = a'$, so ergiebt sich, dafs $c' > c$.

55) In einem Viereck mit hohlen Winkeln ist die Summe der Diagonalen kleiner als die Summe der Seiten, aber gröfser als die halbe Summe der Seiten.

56) Der gerade Weg zwischen zwei Punkten ist kürzer als jeder gebrochene Weg.

57) Wie grofs sind die Peripheriewinkel über dem 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, 10ten Teile der Peripherie?

Wie grofs sind die Peripheriewinkel, welche zu Bogen von 15, 30, 90 Grad gehören?

58) Vier Punkte teilen den Kreis in vier auf einander folgende Bogen von 20^0, 100^0, 80^0, 160^0. Wie grofs sind die Winkel, welche man erhält, wenn die vier Punkte paarweise durch Gerade verbunden werden?

59) Ein Sekantenwinkel von 16^0 steht über einem Kreisbogen von 40^0. Wie grofs ist der Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt?

60) Ein Sehnenwinkel von 40^0 steht über einem Bogen von 60^0. Wie grofs ist der von dem Scheitelwinkel eingeschlossene Bogen?

61) In einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, welches gegebene Winkel hat.

62) Ein Kreis ist durch die Punkte A, B, C bestimmt. Man zeichne die Tangenten in diesen Punkten durch Antragen der Winkel α, β, γ des Dreiecks ABC (§ 24 b, 1).

63) Zwischen zwei Punkten A und B einen Kreisbogen von 18^0 zu zeichnen.

64) Einen Punkt zu finden, von welchem aus zwei an einander stofsende Strecken a und b bezüglich unter den Winkeln α und β gesehen werden (§ 25 a).

65) Je zwei Ecken eines Dreiecks und die Fufspunkte der zugehörigen Höhen liegen auf einem Kreise. A, B, A', B' in Fig. 20 liegen auf einem Kreise.

66) Die in Fig. 20 mit α bezeichneten Winkel sind gleich, ebenso die mit β bezeichneten. Die Winkel β und α sind unter sich gleich (§ 24 b).

67) Die Höhen eines Dreiecks halbieren den Winkel des von den Fufspunkten gebildeten Dreiecks (Fig. 20).

68) Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte. (Siehe Fig. 20 und wende Übung 67 sowie § 21 α an.)

Übungen zu Abschnitt II (zweite Folge). § 3.

1) Konstruktionen nach analytischer Methode. Man zeichnet die gesuchte Figur willkürlich (ohne Rücksicht auf die gegebenen Stücke). Indem man sodann aus den Stücken dieser Figur diejenigen Stücke konstruiert, welche von gegebener Gröfse sein sollen, entstehen Hilfsfiguren, von welchen man untersucht, ob sie durch die gegebenen Stücke bestimmt sind. Ist dies der Fall, so konstruiert man die Hilfsfiguren, und aus diesen wieder die gesuchte Figur.

Beispiel. Ein Dreieck zu konstruieren, in welchem ein

Winkel, die gegenüberliegende Seite und die Summe der anliegenden Seiten von gegebener Gröſse sind.

Analysis. Das gesuchte Dreieck sei ABC (Fig. 21), der gegebene Winkel β und die gegebene Seite AC. Mache auf der Verlängerung von AB die Strecke $BD = BC$, so ist AD die gegebene Summe und δ die Hälfte des gegebenen Winkels β (§ 11 b und 12 b).

Da nun in dem Hilfsdreieck ACD der Winkel δ, die gegenüberliegende Seite AC und die anliegende Seite AD gegeben ist, so läſst sich das Hilfsdreieck und daraus das gesuchte Dreieck konstruieren.

Konstruktion. Mache EF (Fig. 22) gleich der gegebenen Summe, $\sphericalangle EFG$ gleich dem gegebenen Winkel β, den man durch die Gerade FH halbiert. Beschreibe um E mit der gegebenen Seite den Kreis, der FH im allgemeinen in J und J' trifft. Ziehe JK und $J'K'$ parallel mit FG, so ist sowohl EJK als $EJ'K'$ das gesuchte Dreieck.

Beweis. $\sphericalangle EKJ = EFG =$ dem gegebenen Winkel, weil JK mit FG parallel ist. Ferner $JK = KF$, weil die mit δ bezeichneten Winkel einander gleich sind; folglich $EK + KJ = EK + KF = EF =$ der gegebenen Summe. Endlich $EJ =$ der gegebenen Seite. Ebenso beweist man, daſs $EJ'K'$ den Forderungen der Aufgabe genügt.

Determination. (Angabe der Grenzen, innerhalb deren die Gegebenen liegen müssen, damit die Aufgabe lösbar sei.) Die Aufgabe ist lösbar, wenn der Halbstrahl FH von dem Kreise um E getroffen wird. Dies ist der Fall, wenn die gegebene Seite nicht kleiner ist, als die Entfernung der Geraden FH von E. Die Dreiecke EKJ und $EK'J'$ sind nur durch ihre Lage verschieden. Um dies zu zeigen, ziehe man mit EF um E einen Kreis, welcher die Halbierungslinie des Winkels EFG in H schneiden möge. Die gleichzeitige Mittelsenkrechte a von JJ' und HF muſs durch E gehen (§ 20 a). Die Winkel HEJ' und JEF sind gleich, weil sie sich für die Achse a symmetrisch entsprechen. Auch Winkel $EJ'K'$ ist von derselben Gröſse (Wechselwinkel). Die Dreiecke EKJ und $EK'J'$ haben also die Winkel bei E und J', die Winkel bei K und K', sowie die Seiten EJ und EJ' entsprechend gleich (eine Seite und zwei Winkel) und sind kongruent.

2) α) Ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90^0$) zu konstruieren aus 1. a, b. 2. a, β. 3. c, α. 4. c, a. 5. $c, \alpha - \beta = \delta$.

β) Ein Dreieck zu konstruieren aus 1. a, b, h. Analysis. ABC sei das gesuchte Dreieck. Durch Einzeichnung von h entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, die beide konstruierbar

sind. 2. a, α, h. 3. α, β, h. 4. a, q, h. 5. α, h, p. 6. h, p, q. 7. $c, t \measuredangle tc$. 8. $\gamma, w, \measuredangle wc$. 9. $a + b = l$, $a - b = k, h$. 10. $\gamma, \alpha - \beta = \delta, h$.

γ) Ein Dreieck zu konstruieren aus: 1. a, b, p. Analysis. Eines der durch Einzeichnung von h entstandenen rechtwinkligen Dreiecke ist durch p und a konstruierbar und liefert die Mittel zur Vollendung des Dreiecks ABC. Gieb für den fehlenden Eckpunkt zwei Örter an. 2. β, p, q. 3. a, γ, h. 4. a, c, t. 5. a, β, t. 6. c, β, t. 7. a, γ, w. 8. a, β, w. 9. β, γ, w. 10. c, h, t. 11. α, h, t. 12. a, h, t. 13. a, h, w. 14. β, h, w. 15. $a + b = l, \beta, h$. 16. $a, \alpha - \beta = \delta, h$. 17. $a, h, p - q = l$. 18. $a, \beta, b + h = l$. 19. $b, \alpha, h + p = l$.

δ) Man mache sich zur Aufgabe, sämtliche Seiten und Winkel der benutzten Hilfsdreiecke darauf zu untersuchen, ob sie sich durch Stücke des Dreiecks ABC ausdrücken lassen. So ist zum Beispiele in der 10[ten] Aufgabe unter γ) in dem Hilfsdreieck mit den Seiten h, t die 3[te] Seite $(p - q) : 2$; in dem Hilfsdreieck mit den Seiten h, w (13[te] Aufgabe unter γ) ist $\measuredangle hw = (\alpha - \beta) : 2$. Man bildet alsdann leicht neue Aufgaben, zu deren Lösung die gefundene Beziehung den Schlüssel bildet. Z. B. Dreieck aus $p - q = l$, t und a (α)*); $p - q = l$, h und a (α); $\alpha - \beta = \delta$, h und a; $\alpha - \beta = \delta$, w, a.

ε) Ein Viereck zu konstruieren aus: 1. a, b, c, d, f. 2. a, d, f, β, δ. 3. a, d, f, ε, b. 4. $a, \alpha, f, e, \varepsilon$. 5. $a + b = l, \alpha, d, f, \delta$. 6. $a, f, \alpha, \beta, \gamma$. 7. $b - c = l, d, e, \delta, \varepsilon$. 8. $b, e, f, \gamma, \measuredangle ae$. 9. $a, b, d, e + f = l, \alpha$. 10. a, b, c, β, γ. 11. $a, b. d, \varepsilon, \measuredangle ae$. Analysis zu 4. Dreieck ABD ist aus a, α und f konstruierbar. Für C hat man als Örter: 1) Die Gerade, welche durch A so gezogen ist, daſs sie mit f den Winkel ε bildet; 2) den Kreis, welcher mit e um A geschlagen ist.

3) Wenn man durch den Schnittpunkt der Halbierungslinien zweier Dreieckswinkel eine Parallele mit der eingeschlossenen Seite zieht, so ist dieselbe so groſs als die Summe der nicht parallelen Seiten in dem abgeschnittenen Viereck (Trapez).

4) Durch einen gegebenen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Gerade so zu ziehen, daſs sie von beiden Schenkeln gleiche Stücke abschneidet.

5. Zwei Geraden b, b' (Fig. 23) können nicht bis zu ihrem Durchschnitte verlängert werden. Man soll α) ihren Winkel bestimmen und β) die Halbierungslinie des Winkels ziehen. An-

*) Das eingeklammerte Stück liefert eine 2[te] Aufgabe, wenn es für a gesetzt wird: Dreieck aus $p - q$, t und α. Diese Abkürzung in der Aufgabenstellung ist auch im folgenden angewendet.

deutung. Ziehe durch den beliebigen Punkt B auf b die Parallele c zu b'. CBE ist der gesuchte Winkel. Halbiere den Winkel DBC durch BB' und beweise die Gleichheit von β und β'. Die Mittelsenkrechte a = von BB' ist die gesuchte Halbierungslinie, weil b und b' symmetrisch zu a sind.

6) In einer gegebenen Geraden einen Punkt A zu suchen, welcher α) von zwei gegebenen Punkten B und B' gleiche Entfernung hat, β) von zwei gegebenen Geraden b und b' gleiche Entfernung hat.

7) In einer Geraden a einen Punkt A zu suchen, so daſs die von ihm nach zwei gegebenen Punkten B und C (auf derselben Seite von a) gezogenen Geraden gleiche Winkel mit a bilden. Andeutung. B und C mit ihren für a entsprechenden Punkten bestimmen ein symmetrisches gleichschenkliges Trapez. Die Symmetrieachse a geht durch den Schnittpunkt A der Diagonalen und halbiert die dort gebildeten Scheitelwinkel. A ist also der gesuchte Punkt.

8) In der Geraden a einen Punkt A zu suchen, so daſs die Summe der Entfernungen AB und AC so klein wie möglich ist. Andeutung. Der gesuchte Punkt ist wieder der Schnittpunkt A der Diagonalen in dem symmetrischen Viereck $BB'C'C$. Das Minimum der Entfernungssumme ist eben die gemeinsame Gröſse der Diagonalen. Jede andere Entfernungssumme stellt sich als gebrochener Weg zwischen B und C' oder C und B' dar.

9) Den geometrischen Ort der Mittelpunkte gleicher Sehnen zu bestimmen.

10) Den geometrischen Ort derjenigen Punkte zu bestimmen, von welchen aus Tangenten von gegebener Länge an den Kreis gezogen werden können.

11) Den Ort für diejenigen Punkte zu suchen, aus welchen an einen gegebenen Kreis Tangenten gezogen werden können, welche den Tangentenwinkel α mit einander bilden.

12) α) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a + b = l, c, \beta$. Analysis. Verlängere a um b, damit l als Strecke vorliege; ein konstruierbares Dreieck entsteht nun, indem man den Endpunkt D von l mit A verbindet. Auf den noch fehlenden Eckpunkt C des Dreiecks ABC kommt man durch § 20 a. 2. $c, a + b = l$ und $\gamma\,(h', \alpha, h'')$. 3. $a + b = l$, α und $\beta\,(h'')$. 4. $a - b = l, c$ und $\beta\,(h', \gamma, \alpha, h'')$. 5. $a - b = l$, α und $\beta\,(h'')$. 6. $a + b + c = l$, α und β. 7. $a - b + c = l$, α und β. 8. $p - q = l$, α und $\beta\,(b)$. 9. $p - q = l, a, b$.

β) In Befolgung von § 3 Übung 2 δ findet man: 1. In dem bei dem ersten Beispiele in Übung 12 α benutzten Hilfsdreieck

ist der Gegenwinkel zur Seite $a + b = l$ gleich $90^0 \pm \frac{\alpha - \beta}{2}$,*) je nachdem die längere Seite um die kürzere verlängert wurde oder umgekehrt. — Dreieck aus $a + b = l$, $\alpha - \beta = \delta$ und c (h', h''). 2. In dem bei dem 4ten Beispiele in Übung 12 α benutzten Hilfsdreieck ist der Gegenwinkel zur Seite $a - b = l$ gleich $\frac{\alpha - \beta}{2}$, gleichgültig, ob die gröfsere Seite um die kleinere verkürzt oder die kleinere um die Differenz $a - b = l$ verlängert wurde. — Dreieck aus $a - b = l$, $\alpha - \beta = \delta$ und c (h', h''). 3. Das bei dem 8ten Beispiele in Übung 12 α benützte Hilfsdreieck enthält die Seiten $p - q$, a, b und die Winkel $180^0 - \alpha$, β, $\alpha - \beta$. — Dreieck aus $\alpha - \beta = \delta$, a und b ($p - q$, h).

γ) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. c, γ und t (p, u). Welche dieser Aufgaben wird für $\gamma = 90^0$ unmöglich oder unbestimmt? 2. c, h', h''. 3. r, c und α ($t, p, u, u - v, \alpha - \beta, \alpha + 2\gamma$). 4, r, α und β (t', h''').

δ) Konstruiere ein Viereck aus a, d, α, γ und c ($e, \varepsilon, b \pm c$).

13) Der Ort für die Spitzen C aller Dreiecke, welche über der Grundlinie c konstruiert sind und den gegebenen Winkel γ haben, ist ein Kreisbogen über der Sehne AB. Der Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche diesen Dreiecken einbeschrieben sind, ist ein Kreisbogen, welcher über der Sehne AB den Winkel $90^0 + \frac{\gamma}{2}$ fafst (§ 2 Üb. 15).

14) α) Die Tangentenabschnitte, welche von den Ecken ABC des Dreiecks bis zu den Berührungspunkten des einbeschriebenen Kreises reichen, sind paarweise gleich und mögen bezüglich x, y, z heifsen. Aus $x + y = c$, $y + z = a$, $z + x = b$ folgt durch Addition $x + y + z = \frac{a + b + c}{2}$, welcher Wert mit s bezeichnet wird. Durch Subtraktion folgt: $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$. — Dreieck aus: 1. ϱ, $b + c - a$, β (c). 2. α, $b + c - a$ und β (c). 3. $\varrho, c, b \pm a$. 4. ϱ, $a + b - c$, w.

β) Die Tangentenabschnitte, welche von den Ecken ABC des Dreiecks bis zu den Berührungspunkten des der Seite c anbeschriebenen Kreises reichen, mögen x', y', z' heifsen. Aus $x' + y' = c$, $z' - y' = a$, $z' - x' = b$ folgt durch Addition: $z' = \frac{a + b + c}{2} = s$ und nun $x' = s - b$, $y' = s - a$. — Dreieck aus: 1. $a - b + c$, ϱ''' und β (γ). 2. $a + b + c$, ϱ''', α.

*) Wenn $\beta > \alpha$, so schreibe $\frac{\beta - \alpha}{2}$.

15) α) Jede Dreiecksseite wird durch die Berührungspunkte des ein- und anbeschriebenen Kreises in drei Abschnitte geteilt, von denen die beiden äufsern einander gleich sind.

β) Die Berührungspunkte zweier anbeschriebener Kreise mit dem Träger einer Dreiecksseite sind von den Endpunkten dieser Seite gleichweit entfernt.

---

§ 4. Übungen zu Abschnitt III (die besonderen Vielecke).

1) In dem gleichschenkligen Dreieck entsprechen sich die durch die Endpunkte der Grundlinie gezogenen Winkelhalbierenden (Höhen, Mittellinien) für die Symmetrieachse und schneiden sich also auf dieser Achse (§ 6 α).

2) Das gleichseitige Dreieck hat drei Symmetrieachsen, welche mit den Winkelhalbierenden, Höhen, Mittellinien des Dreiecks zusammenfallen. Diese drei Symmetrieachsen schneiden sich in einem Punkte (Üb. 1).

3) Ein Dreieck ist gleichschenklig α) wenn die Halbierungslinie a eines Winkels auf der gegenüberliegenden Seite senkrecht steht, β) wenn die durch ein Eck gezogene Mittellinie auf der gegenüberliegenden Seite senkrecht steht, γ) wenn die Mittelsenkrechte einer Seite durch das gegenüberliegende Eck geht.

4) Ein Viereck ist ein Deltoïd, α) wenn eine Diagonale die Winkel, welche sie durchzieht, halbiert, β) wenn eine Diagonale die Mittelsenkrechte der andern ist.

5) Ein gleichschenkliges Trapez (Viereck mit zwei parallelen und zwei konvergenten, aber gleichen Seiten), hat zwei Paare gleicher Nachbarwinkel. Andeutung. Ziehe $CD \parallel C'B'$ (Fig. 24), so entsteht ein Parallelogramm. Beweise, dafs Dreieck BCD gleichschenklig ist.

6) Jedes gleichschenklige Trapez ist symmetrisch für eine Achse. Diese Achse geht durch die Punkte, in welchen sich die Träger der convergenten Seiten und die Diagonalen schneiden. Sie halbiert den Winkel daselbst. Auch ist die Achse die Mittelsenkrechte einer jeden der parallelen Seiten (Grundlinien). Andeutung. Verlängere BC und $B'C'$ bis zum Schnitt in A (Fig. 24). Beweise, dafs die Dreiecke $BB'A$ und $CC'A$ gleichschenklig sind (Üb. 5, § 12 β). Ziehe die Halbierungslinie des Winkels A, welche eben die Symmetrieachse ist. Das Übrige findet sich leicht.

7) Durch den Punkt A die Parallele zur Geraden a zu ziehen. Andeutung. Setze in dem beliebigen Punkte B von a (Fig. 26) ein und ziehe durch A den Kreis *1*, welcher a in C

trifft. Beschreibe mit demselben Radius und A um C die Kreise *2* und *3*, welche den Punkt D der gesuchten Parallelen bestimmen (§ 29 b).

8) Wenn man durch jeden Eckpunkt eines Dreiecks ABC eine Parallele zur gegenüberliegenden Seite zieht, so entsteht ein neues Dreieck, in welchem A, B, C die Mittelpunkte der Seiten sind. Die Höhen des Dreiecks ABC sind die Mittelsenkrechten der Seiten des neuen Dreiecks. Auch hieraus (vergl. § 2, Üb. 68) kann man schliefsen, dafs die Höhen des Dreiecks ABC sich in einem Punkte schneiden.

9) Alle Senkrechten zwischen zwei Parallelen sind einander gleich (§ 29 a). Die gemeinsame Länge derselben wird der Abstand der Parallelen genannt.

10) Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer Geraden a den Abstand d haben, besteht aus zwei zu a parallelen Geraden b und c, welche in diesem Abstande d gezogen sind. Andeutung zum Beweis. Alle Punkte auf b und c haben von a den Abstand d. Alle Punkte in dem von b und c eingeschlossenen Streifen haben kleinere, alle aufserhalb des Streifens gelegenen Punkte haben gröfsere Abstände.

11) Innerhalb eines Winkels einen Punkt zu suchen, welcher von den Schenkeln gegebene Abstände hat.

12) Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich sind, ist ein Rechteck.

13) Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen, ist ein Rhombus.

14) Wenn eine Figur zwei zu einander senkrechte Symmetrieachsen hat, so ist sie auch symmetrisch für den Schnittpunkt der Achsen. In einer solchen Figur gehören jedem Punkte B drei andere Punkte B', B'', B''' zu, welche mit ihm ein Rechteck bilden. Andeutung. (Fig. 27.) Dem Punkte B entspricht B' für die Achse a und B'' für die Achse a'. Die Strecken AB' und AB'' sind gleich, weil sie beide der Strecke AB für eine Achse entsprechen. Der Winkel $B'AB''$ ist ein gestreckter, denn er ist doppelt so grofs, als der rechte Winkel zwischen a und a'. Daraus folgt, dafs B' und B'' sich für A symmetrisch entsprechen. Dem Punkte B'' entspricht noch B''' für die Achse a. Dann entsprechen sich auch B und B''' für den Mittelpunkt A. Die Figur $BB''B'''B'$ ist ein Parallelogramm, weil sich die Ecken paarweise für A entsprechen. Sie ist ein Rechteck, weil der Winkel $B'BB''$ ein rechter ist.

15) In jeder Figur, welche zwei zu einander senkrechte Symmetrieachsen hat, gehören zu einer Geraden drei andere, welche mit ihr einen Rhombus bestimmen.

16) Wenn eine Figur für eine Achse a und einen Punkt A auf a symmetrisch ist, so hat sie noch eine zweite Symmetrieachse a', welche durch A geht und auf a senkrecht steht. Andeutung. (Fig. 27.) Dem Punkte B' entspricht für a der Punkt B und für A der Punkt B''. Die Strecken AB und AB'' sind gleich, weil sie beide gleich AB' sind. Man ziehe nun die Gerade a' senkrecht auf a. Die Winkel α' sind gleich, weil jeder der Komplementwinkel zu einem der gleichen Winkel α ist. Wenn die Winkel α' gleich und $AB = AB''$, so sind B, B'' für die Achse a' symmetrisch entsprechend.

Die folgenden Konstruktionen 17—24 sind mit dem Lineale allein auszuführen.

17) Ein Parallelogramm ist gegeben. Man soll demselben ein anderes Parallelogramm einschreiben, von welchem der Träger einer Seite gegeben ist.

18) Ein Parallelogramm ist gegeben. Man soll demselben ein anderes Parallelogramm umschreiben, von dem ein Eckpunkt gegeben ist.

19) Ein Rechteck mit seinen Achsen ist gegeben. Man soll um dasselbe einen Rhombus beschreiben, von dem der Träger einer Seite gegeben ist.

20) Man soll in einen Rhombus ein Rechteck zeichnen, von dem ein Eckpunkt gegeben ist.

21) In das Achsensystem eines Rechtecks zu einer beliebigen Richtung (welche durch keinen Eckpunkt geht) den zugehörigen Rhombus zu zeichnen.

22) In das Achsensystem eines Rhombus oder eines Rechtecks zu einem beliebigen Punkte das zugehörige Rechteck zu zeichnen.

23) In das Achsensystem eines Rhombus soll man zeichnen:

α) Ein zweiachsiges Achtseit, welches durch zwei Seitenrichtungen in demselben Quadranten bestimmt ist.

β) Ein zweiachsiges Achteck, welches durch zwei Ecken in demselben Quadranten bestimmt ist.

24) α) Ein zweiachsiges Sechsseit zu zeichnen. (Man ziehe eine Seite senkrecht auf einer Achse und eine zweite beliebig.)

β) Ein zweiachsiges Sechseck zu zu zeichnen. (Man nehme einen Eckpunckt auf einer Achse an.)

25) Um ein Viereck, dessen Gegenwinkel supplementär sind, kann man einen Kreis ziehen. Andeutung. Ziehe den Kreis durch A, B, C in Fig. 28. Bogen AEC ist der Ort für die Punkte, aus welchen die Sehne AC unter dem Winkel $180^0 - \beta$ gesehen wird. D mufs also auf diesem Bogen liegen.

26) In ein Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten dieselbe

Summe liefern, kann man einen Kreis zeichnen. Andeutung. Wenn man (Fig. 29) im Viereck $ABCD$ den Kreis zieht, der DA, AB, BC berührt, und von beiden Summen gegenüberliegender Seiten die Gröfse $x + y$ abzieht, so bleibt die Bedingung $NC + MD = CD$. Würde nun der Kreis nicht von CD, sondern von CE berührt, so hätte man (§ 31 α) auch $NC + ME = CE$. Durch Subtraktion erhält man $ME - MD = DE = CE - CD$, was unmöglich ist (§ 19 a, Folgerung).

27) In jedes Deltoïd läfst sich ein Kreis zeichnen. Andeutung. Nach Übung 26, oder: Ziehe den Kreis so, dafs er drei Seiten berührt; beweise (§ 16 b, 2), dafs der Mittelpunkt auf der Symmetrieachse liegt und schliefse aus § 16 a, dafs er auch die vierte Seite berührt.

28) Um jedes gleichschenklige Trapez läfst sich ein Kreis zeichnen. Andeutung. Nach Übung 25, oder: Ziehe den Kreis durch drei Ecken; beweise, dafs der Mittelpunkt auf der Symmetrieachse liegt (§ 16 b, 1) und schliefse aus § 16 a, dafs der Kreis auch durch den vierten Eckpunkt geht.

29) Unter welcher Bedingung läfst sich ein Kreis ziehen α) um ein Deltoïd, β) in ein Trapez?

30) Ein regelmäfsiges Vieleck ist symmetrisch α) für jede Halbierungslinie eines Winkels, β) für jede Mittelsenkrechte einer Seite. Andeutung. In beiden Fällen beweist man sehr leicht, dafs beiderseits die Seiten, Ecken, Winkel sich paarweise für die Achse symmetrisch entsprechen.

31) Ist die Seitenzahl des regelmäfsigen Vielecks ungerade, so ist jede Halbierungslinie eines Winkels zugleich die Mittelsenkrechte der gegenüberliegenden Seite. Das Vieleck hat also n gleichartige Symmetrieachsen. Andeutung. Nachdem man durch das Eck A die Halbierungslinie des Winkels als Achse gezogen hat, bleibt noch eine gerade Zahl von Ecken übrig. Die zwei letzten dieser Ecken entsprechen sich auch für die Achse, welche somit die Mittelsenkrechte der sie verbindenden Vielecksseite ist.

32) Ist die Seitenzahl des regelmäfsigen Vielecks gerade, so wird jede Halbierungslinie eines Winkels durch den gegenüberliegenden Eckpunkt gehen und den Winkel daselbst halbieren. Jede Mittelsenkrechte einer Seite wird auch die gegenüberliegende Seite senkrecht halbieren. Das Vieleck hat $n : 2$ Symmetrieachsen der einen und ebenso viele Symmetrieachsen der andern Art. Andeutung. Hat man den Winkel am Eckpunkt A halbiert, so werden wegen der paaren Seitenzahl zuletzt zwei Seiten übrig sein, welche sich für die Achse entsprechen. Ihr Schnittpunkt, das dem Punkt A gegenüberliegende Eck, mufs also auf der

Achse liegen und der Winkel daselbst wird von der Achse halbiert u. s. w.

33) Die n Symmetrieachsen eines regelmäſsigen Vielecks gehen alle durch den Mittelpunkt des dem Vieleck umbeschriebenen Kreises. Sie sind Träger von doppelt so vielen Halbstrahlen, welche den Winkelraum von 360^0 in $2 \,.\, n$ gleiche Teile teilen. Ist die Seitenzahl des Vielecks gerade, so kann man die Anzahl dieser Winkel durch 4 teilen, und kommt so auf einen rechten Winkel. Solche Vielecke haben also Symmetrieachsen, die auf einander senkrecht stehen, und sind symmetrisch für den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises (Üb. 14). Bei den Vielecken mit ungerader Seitenzahl ist dies nicht der Fall.

34) Ein Sehnenvieleck ist regelmäſsig, wenn seine Seiten gleich sind. Andeutung. Die den Seiten zugehörigen Centriwinkel sind auch gleich, das Vieleck ist also nach § 32 a regelmäſsig.

35) Ein Tangentenvieleck ist regelmäſsig, wenn seine Winkel gleich sind. Andeutung. Die Halbierungslinien der Vieleckswinkel gehen durch den Mittelpunkt des Kreises. Jedes der so entstandenen Dreiecke ist gleichschenklig (§ 12 β), so daſs je zwei auf einander folgende Ecken und deshalb alle Ecken vom Mittelpunkte denselben Abstand haben. Auſserdem sind die Centriwinkel in diesen Dreiecken gleich. Das Vieleck ist nach § 32 a regelmäſsig.

36) Ein Sehnenvieleck von ungerader Seitenzahl ist auch regelmäſsig, wenn seine Winkel gleich sind. Andeutung. (Fig. 30.) Zeige, daſs das Vieleck für die Mittelsenkrechte a irgend einer Seite symmetrisch ist. B und C sind symmetrisch zu a. Die Strahlen BE und CD sind wegen der Gleichheit der Winkel B und C symmetrisch entsprechend, folglich auch ihre Schnittpunkte E und D mit dem für a symmetrischen Kreise. So weiter schlieſsend findet man, daſs irgend zwei auf einander folgende Seiten (ihr Schnittpunkt sei das Eck P) für die Mittelsenkrechte der dem Eckpunkte P gegenüberliegenden Seite sich symmetrisch entsprechen und gleich sind.

---

§ 5. Übungen zu Abschnitt III.

1) α) ein gleichschenkliges Dreieck (Grundlinie c) zu zeichnen aus 1. a, γ. 2. c, α. 3. a, c. 4. a, α. 5. aus dem Umring und der Höhe.

β) ein rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck aus seiner Höhe zu seichnen.

γ) ein gleichseitiges Dreieck aus seinem Umring zu zeichnen (eine Strecke in drei gleiche Teile zu teilen).

2) Ein Parallelogramm zu zeichnen aus: 1. a, b, e. 2. a, e, α. 3. a, h, b. 4. a, h, α. 5. a, e, ε. 6. a, e, f. 7. e, f, ε. 8. e, f, h.

3) Ein Rechteck zu zeichnen aus: 1. a, e. 2. a, ε. 3. e, ε.

4) Einen Rhombus zu zeichnen aus: 1. e, f. 2. e, a. 3. e, h. 4. e, α. 5. h, α.

5) Ein Quadrat zu zeichnen aus: 1. a. 2. e.

6) Ein Dreieck zu zeichnen aus: 1. $a + b + c = l, \alpha, h$. 2. $a - b + c = l, a, h$. 3. $p - q = l, \alpha, h$. 4. c, γ, h. 5. r, α, h'. 6. $a + b - c, \varrho'''$ und $\varrho\,(\gamma)$. 7. $a - b + c, \varrho, \varrho'''$. 8. $c + b - a, \varrho''', \varrho$. 9. $a + b + c, \varrho''', \varrho'$. 10. c, ϱ, γ. (Vergl. § 3, Ubung 13.) 11. $\gamma = 90^0, c, \varrho$.

7) α) Konstruiere ein Viereck aus 1. a, b, c, d und $\sphericalangle\, bd$. Andeutung. Die gegebenen Seiten b, d und der eingeschlossene Winkel $\sphericalangle\, b\, d$ liegen nicht in einem Dreieck. Um ein konstruierbares Hilfsdreieck zu erhalten, verschiebe man die eine der Strecken b, d parallel mit der anfänglichen Lage längs einer der übrigen Seiten. Die bewegte Strecke durchstreicht die Fläche eines Parallelogramms und der Winkel zwischen b und d bleibt dabei ungeändert. 2. $a, b, c, d, \alpha + \beta$. 3. $a, c, \alpha, \beta, \gamma$.

β) Konstruiere ein Trapez aus b, d, f und $\sphericalangle\, bd$ ($\alpha, \beta, h, \alpha - \beta$).

γ) Konstruiere ein Viereck aus a, e, f, ε und b ($\sphericalangle\, ae$, $\sphericalangle\, be$, c).

δ) Konstruiere ein Trapez aus α, e, f und ε (h, $\sphericalangle\, ae$).*)

8) Das bei Üb. 7 β benützte Hilfsdreieck enthält die Seiten $a - c, b, d$, die Winkel $\alpha, \beta, \sphericalangle\, bd$. — Trapez aus $a - c, b, d, f$; aus a, b, c, d.

9) Das bei Üb. 7 δ benützte Hilfsdreieck enthält die Seiten $a + c, e, f$ und den Winkel ε. — Trapez aus $a + c, e, f, b$; aus a, c, e, f.

10) Konstruiere ein gleichschenkliges Trapez aus: 1. a, b, e. 2. a, b, h. 3. a, b, α. 4. a, h, α.

11) Verschiebt man in dem Dreieck ABC (Fig. 25) die Seite a, bis ihr Endpunkt C nach A gelangt, so ist B in die vierte Ecke D des Parallelogramms $ACBD$ gekommen. Die Diagonale CD des letzteren halbiert AB in E, und die Hälfte CE dieser Diagonale CD fällt mit t''' zusammen. Das Hilfsdreieck ACD hat die Seiten $b, a, 2 . t'''$, die Winkel $180^0 - \gamma$, $\sphericalangle\, bt'''$, $\sphericalangle\, at'''$ und die Höhen h' und h''. — Dreieck aus a, b, t'''; aus $a, t''', \sphericalangle\, bt'''$; aus $a, t''', \sphericalangle\, at'''$; aus b, t''', h''; aus b, t''', h'.

*) Einige der Aufgaben in Übung 7 können auch ohne Verschiebung von Strecken leicht gelöst werden.

12) Konstruiere ein Sehnenviereck aus: 1. r, a, b und c (α, f, ε, $\alpha \pm \beta$). 2. r, $a \pm b$, c und γ (α, f, e, β, d).

13) Konstruiere ein Tangentenviereck aus: 1. ϱ, α, β und γ (b, $a + b$, e). 2. a, c, b und α (f, $\beta + \gamma$).

14) Ein Dreieck zu zeichnen, wenn die Mittelpunkte der Seiten gegeben sind.

15) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. ϱ, α und c (β, h, q, w'). 2. c, γ und ϱ ($\varrho + r$). 3. c, r, ϱ. 4. c, γ, ϱ'''. 5. c, r, ϱ'''.

16) Ein Kreis und ein Tangentenwinkel desselben sind gegeben. Man soll eine dritte Tangente ziehen, so daſs das in den Tangentenwinkel fallende Stück derselben eine gegebene Länge habe. (Vergl. § 5, Üb. 6, Beispiel 10.)

17) Konstruiere ein Tangentenviereck aus ϱ, c, α, β.

18) In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Mittellinie nach der Mitte der Hypotenuse halb so groſs als die Hypotenuse.

19) Wenn in einem Dreieck die Mittellinie nach der Mitte einer Seite die Hälfte dieser Seite ist, so ist der gegenüberliegende Winkel ein rechter.

20) Welches ist der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleiche Entfernung haben?

21) In einen Winkel eine gegebene Strecke so zu legen, daſs sie mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

22) Durch einen gegebenen Punkt D, der innerhalb eines Winkels liegt, eine Gerade so zu ziehen, daſs D ihr Mittelpunkt wird.

23) Zwischen zwei Parallelen durch einen gegebenen Punkt eine gegebene Strecke zu legen.

24) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche, mit gegebenem Radius beschrieben,

α) eine gegebene Gerade berühren;

β) einen gegebenen Kreis berühren;

γ) mit einem gegebenen Kreise eine Sehne von der Länge l gemein haben;

δ) einen gegebenen Kreis in den Endpunkten eines Durchmessers schneiden.

Andeutung zu γ. Die Entfernung des Mittelpunktes vom Centrum des gegebenen Kreises ist Längendiagonale eines Deltoïds, welches durch die Seiten und die Querdiagonale bestimmt ist.

25) Welches ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der Kreise, welche zwei parallele Gerade berühren?

26) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu zeichnen, welcher

α) durch zwei gegebene Punkte A, B geht;

β) zwei konvergente Geraden a, b berührt;

γ) durch den Punkt A geht und die Gerade b berührt;
δ) durch den Punkt A geht und den gegebenen Kreis K berührt.

Übungen zu Abschnitt IV (Flächeninhalt). § 6.

1) Wie grofs ist die Fläche ω eines Parallelogramms oder Rechtecks, wenn α) $g = 3{,}725$, $h = 2{,}976$, β) $g = 10{,}279$, $h = 9{,}827$.

2) Wie grofs ist die Fläche ω eines Dreiecks, in welchem g und h die angegebenen Werte haben?

3) Wie grofs ist die Grundlinie g eines Dreiecks, wenn α) $\omega = 72$, $h = 9$; β) $\omega = 240$, $h = 24$; γ) $\omega = 950$, $h = 25$.

4) Wie grofs ist die Höhe eines Dreiecks, wenn α) $\omega = 45{,}6423$, $g = 4{,}1493$; β) $\omega = 7{,}28$, $g = 1{,}3$; γ) $\omega = 9{,}18$, $g = 2{,}7$.

5) Wie grofs sind die Seiten eines Quadrats, wenn α) $\omega = 1{,}4641$, β) $\omega = 2{,}89$, γ) $\omega = 2$.

6) Wie grofs ist die Fläche eines Trapezes, wenn α) $g = 8$, $g' = 6$, $h = 3$; β) $g = 17{,}23$, $g' = 12{,}11$, $h = 5{,}2$; γ) $g = 3{,}725$, $g' = 2{,}123$, $h = 1{,}18$.

7) Wie grofs ist die untere Grundlinie g eines Trapezes, wenn α) $g' = 4$, $h = 3$, $\omega = 18$; β) $g' = 32$, $h = 2$, $\omega = 95$; γ) $g' = 8$, $h = 2$, $\omega = 18$.

8) Wie grofs ist die Höhe h eines Trapezes, wenn α) $g = 2{,}4$, $g' = 2$, $\omega = 1{,}76$; β) $g = 23$, $g' = 15$, $\omega = 143{,}83$.

9) Ein Quadrat liegt mit der einen Ecke in der Ecke eines gröfseren Quadrates. Der Überschufs der Seite des gröfseren Quadrates über die des kleineren ist 118 m, der Überschufs der Quadrate selbst 26 432 qm. Wieviel Inhalt hat jedes der beiden Quadrate?

10) Ein Feld von der Form eines Trapezes wurde zu 7150 Mark gekauft, nämlich der Ar zu 22 Mark. Wenn nun die Höhe des Trapezes 65 Meter beträgt und die kleinere Grundlinie 200 m, wie lang ist die gröfsere Grundlinie?

11) Wie viele Rechtecke von 62 cm Länge und 25 cm Breite braucht man, um eine rechtwinklige Fläche von 43,4 m Länge und 7,5 m Breite zu belegen?

12) Eine Diagonale eines Vierecks beträgt 13 m, die von den nicht auf ihr liegenden Eckpunkten auf dieselbe gefällten Senkrechten sind 7,3 m und 2,5 m. Wie grofs ist die Fläche dieses Vierecks?

13) Die Seiten dreier regelmäfsigen Vielecke seien 1. Wenn

die Vielecke nach einander 6, 12, 24 Seiten haben, so beträgt der Abstand der Seiten vom Mittelpunkte bezüglich 0,866, 0,966, 0,991. Wie grofs sind die Flächen der drei Vielecke?

14) α) Ein Parallelogramm in n gleiche Teile zu teilen. β) Ein Dreieck in n gleiche Teile zu teilen. Andeutung. α) Man teile die Grundlinie des Parallelogramms in n gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallelen mit den anliegenden Seiten. β) Man teile die Grundlinie des Dreiecks in n gleiche Teile und verbinde die Teilpunkte mit dem gegenüberliegenden Eck. (Die Teilung einer Strecke soll mit dem Mafsstabe ausgeführt werden. Die Teilung durch Konstruktion folgt erst in § 40 c.)

15) α) Ein Parallelogramm in zwei Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen m und n verhalten.

β) Ein Dreieck in zwei Teile zu teilen, die sich wie die Zahlen m und n verhalten. Andeutung. α) Man teile die Grundlinie des Parallelogramms in $m + n$ gleiche Teile und ziehe durch den m^{ten} Teilpunkt eine Parallele mit den anliegenden Seiten. β) Man teile die Grundlinie des Dreiecks in $m + n$ gleiche Teile und verbinde den m^{ten} Teilpunkt mit dem gegenüberliegenden Eck.

16) Ein Parallelogramm von einem Eckpunkte A aus in n gleiche Teile zu teilen. Andeutung. Wenn n eine gerade Zahl ist, so teile jede der Seiten, welche nicht durch A gehen, in $\frac{n}{2}$ gleiche Teile und verbinde A mit den Teilpunkten. Wenn n eine ungerade Zahl ist, so teile zuerst in $2 \cdot n$ Teile.

17) Alle gleichen Parallelogramme über derselben Grundlinie liegen zwischen zwei Parallelen. Andeutung. Sie haben gleiche Höhe h. Ihre obern Grundlinien liegen auf der Parallelen zur untern Grundlinie, die im Abstande h gezogen ist.

18) Die Spitzen aller gleichen Dreiecke über derselben Grundlinie liegen auf einer mit der Grundlinie parallelen Geraden.

19) Wenn man durch einen Punkt in der Diagonale eines Parallelogramms Parallelen mit den Seiten zieht, so sind die beiden Parallelogramme einander gleich, durch welche die Diagonale nicht geht. Andeutung. (Fig. 31.) Aus $ABC = ADC$, $AFO = AJO$, $OHC = OGC$ (§ 28 c) folgt durch Subtraktion $FBHO = JOGD$.

20) Ein Parallelogramm in ein anderes von gegebenem Winkel oder in ein Rechteck zu verwandeln, ohne die Grundlinie zu ändern (§ 37 a).

21) Ein Dreieck in ein anderes von gegebenem Winkel oder

in ein rechtwinkliges zu verwandeln, ohne die Grundlinie zu ändern (§ 37 a).

22) Ein Parallelogramm (Rechteck) in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln.

Auflösung. *FBHO* (Fig. 31) sei das gegebene Parallelogramm und *HC* die auf die Verlängerung einer Seite abgetragene neue Grundlinie. Man verlängere *BF* bis zum Schnittpunkte *A* mit der Geraden *CO* und vollende das Parallelogramm *BCDA*. Dann werden die Verlängerungen von *HO* und *FO* das gesuchte Parallelogramm *JOGD* bestimmen. (Übung 19.)

23) Ein Dreieck in ein anderes mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln. Andeutung. *BFC* (Fig. 32) sei das gegebene Dreieck und *BA* die neue Grundlinie. Man verbinde *A* mit *C* und ziehe *FD* mit *AC* parallel, so ist *BAD* das verlangte Dreieck.

24) Ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln. Andeutung. Schneide durch eine Diagonale *AC* (Fig. 33) ein Dreieck *ABC* von dem gegebenen Vieleck ab. Wenn die Verlängerung der Seite *DC* und eine durch *B* mit *AC* gezogene Parallele sich in *G* schneiden, so ist die Fläche des Dreiecks *ABC* derjenigen des Dreiecks *AGC* gleich. Das Vieleck *ACBDEF* ist also in ein anderes *AGDEF* verwandelt, welches die gleiche Fläche besitzt und eine Seite weniger hat. Man wiederhole dieses Verfahren.

25) Die Grenze zweier Grundstücke ist eine gebrochene Linie. Man soll diese Grenze in eine geradlinige verwandeln, ohne die Flächen der Grundstücke zu ändern. Andeutung. (Fig. 34.) Ziehe durch *B* eine Parallele zu *AC* und verbinde *A* mit *D* oder *C* mit *E*.

26) Durch den Punkt *M* in Fig. 35 eine Gerade so zu ziehen, daſs das von dem Dreieck *ABC* unten abgeschnittene Stück dem Dreieck *APM* gleich sei. Andeutung. Ziehe $PE \parallel MB$, so ist *ME* die gesuchte Teillinie.

27) Das Dreieck *ABC* in Fig. 35 von *M* aus in *n* gleiche Teile zu teilen. Andeutung. Betrachte *AC* (Fig. 35) als die Grundlinie des Dreiecks und verwandle es nach Üb. 23 in ein anderes Dreieck *AMD* mit der Grundlinie *AM* (*D* ist in der Figur nicht gezeichnet), so wird nach jener Konstruktion das Eck *D* auf der Verlängerung von *AB* liegen. Teile das Dreieck *AMD* von der Spitze *M* aus nach Übung 14 β in *n* gleiche Teile und verwende für die Teillinien, welche über das Dreieck *ABC* hinausreichen, die Übung 26.

28) Ein stumpfwinkliges Dreieck mit Beibehaltung der dem

stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

29) Ein Parallelogramm (Dreieck) in ein anderes von gegebener Seite zu verwandeln α) ohne die Grundlinie zu verändern, β) ohne die Diagonale zu verändern.

30) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, von welchem die Grundlinie und ein anliegender Winkel gegeben ist.

31) Ein Dreieck in ein anderes von gegebener Seite und gegebenem Winkel zu verwandeln.

32) Ein Dreieck mit Beibehaltung eines Winkels an der Grundlinie in ein anderes von gegebener Höhe zu verwandeln.

33) Zwei beliebige Parallelogramme (Dreiecke) zu einem einzigen zu vereinen.

34) Die Fläche eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und derjenigen Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten verbindet. Andeutung. (Fig. 36.) Ziehe $EF \parallel DA$. Die Dreiecke NCE und NBF sind gleich, weil sie sich für das Centrum N entsprechen. Die Fläche des Trapezes ist also gleich der Fläche des Parallelogramms $AFED$.

35) Ein Trapez wird halbiert durch jede Gerade, welche durch den Halbierungspunkt der Mittellinie geht und die beiden parallelen Seiten (Grundlinien) schneidet.

36) Ist die Mittellinie eines Parallelogramms oder Trapezes in n gleiche Teile geteilt und werden durch die Teilpunkte gerade Linien zwischen den Grundlinien gezogen, welche sich nicht innerhalb der Figur schneiden, so teilen sie die Figur in n gleiche Teile.

37) Ein Parallelogramm in ein Trapez zu verwandeln, dessen eine Seite verlängert durch einen gegebenen Punkt geht.

38) Wenn man einen Punkt im Innern eines Dreiecks mit den drei Ecken verbindet, so stehen je zwei der entstandenen Dreiecke in demselben Verhältnis, in welchem die Grundlinie des dritten Dreiecks durch die Verlängerung der gemeinsamen Seite der beiden ersten geteilt wird. Andeutung. Jedes Dreieck ist die Differenz zweier Dreiecke. Die Minuenden und Subtrahenden stehen in dem angegebenen Verhältnis, folglich auch die Differenzen.

39) Ein Dreieck auf die in 38 angegebene Weise in drei Dreiecke zu teilen, welche sich verhalten, α) wie $1:2:3$, β) wie $1:1:3$, γ) wie $1:1:1$, δ) wie die Seiten eines Dreiecks (§ 21 α).

40) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks seien a und b. Die Hypotenuse c werde durch die Höhe h in die Abschnitte p und q geteilt, von denen p an a und q an b anliegt.

Es gelten nun die Formeln: α) $a^2 = c \,.\, p$; $b^2 = c \,.\, q$; β) $a^2 + b^2 = c^2$. γ) $h^2 + p^2 = a^2$; $h^2 + q^2 = b^2$. δ) $h^2 = p \,.\, q$. Andeutung. α), β), γ) finden sich leicht durch § 38. δ) findet man aus $h^2 = a^2 - p^2$, wenn man für a^2 den Wert $c \,.\, p$ einsetzt. Man hat $h^2 = c \,.\, p - p^2 = p\,(c - p) = p \,.\, q$.

41) Die übrigen der in 40) angegebenen Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, wenn α) $a = 5$, $b = 6$. β) $a = 4$, $c = 7$. γ) $a = 3{,}4$, $h = 2{,}1$. δ) $c = 7$, $h = 2$. ε) $c = 3$, $h = 1$.

42) Wenn a die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist, so beträgt die Höhe $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$ und die Fläche $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$.

43) Die Seite eines Rhombus ist 12 m und ein Winkel desselben ist 60^0. Wie grofs ist sein Inhalt?

44) Zu untersuchen, ob ein Dreieck recht-, spitz- oder stumpfwinklig ist, wenn seine Seiten betragen: α) 12, 16, 20; β) 15, 10, 9; γ) 12, 9, 11; δ) 3, 4, 5; ε) 6, 8, 10.

45) Wenn a und b zwei Zahlen sind und x, y, z die Seiten eines Dreiecks bedeuten, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wenn die Gleichungen $x^2 = a \,.\, b$, $y = \frac{a - b}{2}$, $z = \frac{a + b}{2}$ gelten.

46) Wenn 14, 13, 15, (56, 25, 39) bezüglich die Längen der Grundlinie und der beiden andern Seiten sind, so sind die Längen der Höhe und der Abschnitte auf der Grundlinie durch ganze Zahlen dargestellt.

47) Welche Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises hat eine Sehne von der Länge s? Antwort: $\sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}$.

48) Welches ist die Länge der Sehne, deren Entfernung vom Mittelpunkte d ist? Antwort: $2\sqrt{r^2 - d^2}$.

49) Je kleiner die Sehne, um so gröfser ist ihre Entfernung vom Mittelpunkte und umgekehrt.

50) Die kleinste Sehne, welche durch einen Punkt M geht, steht senkrecht auf Strecke MC, welche M mit dem Mittelpunkte verbindet. Sie wird in M halbiert (§ 26, b, 3).

51) Projiciert man zwei Seiten eines Dreiecks aufeinander, so sind die Produkte aus jeder der Seiten und der Projektion der andern gleich. Andeutung. Nach § 39 a) hat man $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2\,cq = b^2 + c^2 \mp 2\,b\,y$ (y bedeutet die Projektion von c auf b). Das obere Zeichen gilt, wenn der Winkel α spitz, das untere, wenn α stumpf ist.

52) In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der vier Seiten gleich der Summe der Quadrate beider Diagonalen. Andeutung. (Fig. 37.) $f^2 = a^2 + d^2 - 2\,a \,.\, x$, $e^2 = a^2 + b^2 + 2 \,.\, a \,.\, y$. Die Strecken x und y sind gleich, weil sie sich

für den Schnittpunkt der Diagonalen symmetrisch entsprechen. Durch Addition: $e^2 + f^2 = 2a^2 + d^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2a^2 + 2b^2$.

53) In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite und das vierfache Quadrat der zugehörigen Mittellinie gleich der doppelten Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten. Andeutung. (Fig. 38.) Verlängere die Mittellinie um sich selbst, um den vierten Eckpunkt eines Paralellogramms zu erhalten. Nach Üb. 52 ist $2c^2 + 2b^2 = a^2 + (2 \,.\, t')^2 = a^2 + 4t'^2$.

54) Jede der drei Mittellinien durch die drei Seiten des Dreiecks auszudrücken $(t' = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2})$.

55) Aus Übung 53 die Gleichung $4(t'^2 + t''^2 + t'''^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ abzuleiten.

56) Um die Seiten des Dreiecks durch die Mittellinien auszudrücken, zieht man die Gleichung $b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2 = 2t'^2$ von $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{4}{3}(t'^2 + t''^2 + t'''^2)$ ab. $(a = \frac{2}{3}\sqrt{2t''^2 + 2t'''^2 - t'^2}.)$

57) Der Kreis um die Mitte der Strecke a (Fig. 38) mit t' als Radius ist der Ort aller Punkte, für welche die Quadrate der Entfernungen von den Endpunkten der Strecke eine konstante Summe haben (Üb. 53).

58) Konstruiere ein Dreieck aus 1. $a^2 + b^2 = l^2$, c und α (γ, h''', r, h'). 2. $a^2 + b^2$, h', β. 3. $a^2 + b^2$, r, γ. 4. $a^2 + b^2$, t und α(γ, h', $p - q$).

59) Aus der Gleichung $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$ die Gröfse q zu bestimmen und h''' zu berechnen. Andeutung.

$$q = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}, \quad h'''^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

60) Die Form für h'''^2 in Übung 59 durch Anwendung der Regel $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ umzuformen. Andeutung. Man erhält zuerst $\frac{[(b + c)^2 - a^2]\,[a^2 - (b - c)^2]}{4c^2}$ und durch nochmalige Anwendung derselben Regel

$$\frac{(b + c + a)\,.\,(b + c - a)\,.\,(a + b - c)\,.\,(a - b + c)}{4c^2}.$$

Wenn man $\frac{a + b + c}{2}$ gleich s setzt, so sind die vier Faktoren des Zählers $2s$, $2(s - a)$, $2(s - b)$, $2(s - c)$. Durch Einsetzen erhält man $h'''^2 = \frac{4}{c^2} \cdot s(s - a)(s - b)(s - c)$

$$\text{oder } h''' = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}.$$

61) Die Fläche ω des Dreiecks durch die drei Seiten auszudrücken. Andeutung. Multipliziert man die letzte Gleichung in Üb. 60 mit $\frac{c}{2}$, so erhält man $\omega = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

62) Den Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises durch die drei Seiten des Dreiecks auszudrücken. Andeutung. Verbinde die Ecken des Dreiecks mit dem Mittelpunkte dieses Kreises. Man hat

$$\omega = \frac{a \cdot \varrho}{2} + \frac{b \cdot \varrho}{2} + \frac{c \cdot \varrho}{2} = \frac{\varrho}{2}(a + b + c) = \varrho \cdot s;$$

$$\varrho = \frac{1}{s} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

63) Die Differenz der Quadrate zweier Dreiecksseiten ist gleich der Differenz der Quadrate ihrer Projektionen auf die dritte Seite; $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ (Fig. 39).

64) α) Wenn in einem Dreieck (Fig. 39) $a^2 - b^2 = l$ und c gegeben sind, so kann man p und q und dadurch den Fufspunkt von h eindeutig bestimmen. Die in diesem Fufspunkte errichtete Senkrechte ist also der geometrische Ort für die Spitze des Dreiecks. Beweis: $a^2 - b^2 = p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$. Je nachdem l^2 gröfser, gleich oder kleiner als c^2 ist, wird $\sphericalangle BAC$ stumpf, recht oder spitz sein. Im ersten Falle ist $c = p - q$, im dritten $c = p + q$, der zweite Fall ist leicht zu erledigen. Für den dritten Fall z. B. hat man $p^2 - q^2 = l^2$, $p + q = c$, $p - q = l^2 : c$, $p = (c^2 + l^2) : 2c$; $q = (c^2 - l^2) : 2c$.

β) Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a^2 - b^2 = l^2$, c und a (γ, h, t, h', r). 2. $a^2 - b^2$, $p - q$ und α (γ, h, h').

Übungen zu Abschnitt V. (Ähnliche Punktreihen.) § 7.

1) In jedem Trapez ist α) die Strecke, welche die Mittelpunkte der nicht parallelen Seiten verbindet, gleich der Summe, und β) die Strecke, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet, gleich der Differenz der beiden parallelen Seiten (Grundlinien). Andeutung. Die Mittelpunkte E, F, G, H (Fig. 40) der nicht parallelen Seiten und der Diagonalen liegen auf der Halbierungslinie des von den Parallelen gebildeten Streifens (§ 1, Üb. 19 a). Man hat nach § 40 β für α) $EG = \frac{1}{2}AB$, $GH = \frac{1}{2}DC$ u. s. w. Für β) hat man $EG = \frac{1}{2}AB$, $EF = \frac{1}{2}DC$ u. s. w.

2) Die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks sind die Ecken eines Parallelogramms. Die Seiten des Parallelogramms sind den Diagonalen des Vierecks parallel und die Hälften dieser Diagonalen.

3) Vier Punkte bestimmen drei einfache Vierecke. Man kommt also durch 2) zu drei Parallelogrammen. Je zwei derselben haben eine Diagonale gemein. Daraus folgt, dafs alle drei Parallelogramme den Mittelpunkt gemein haben (die entstehende Figur stellt, wenn man sie als schiefwinklige Parallelprojektion betrachtet [Stereometrie § 25 u. 26] ein Tetraeder und das Oktaeder vor, dessen Hemieder jenes Tetraeder ist.

4) Was ist von dem Parallelogramm in Üb. 2 zu sagen, wenn das Viereck ein Deltoïd (ein Rhombus) und ein gleichschenkliges Trapez (ein Rechteck) ist?

5) α) Eine Strecke zu konstruieren, von der eine gegebene Strecke $^5/_9$ ist.

β) Eine Strecke zu konstruieren, welche zu einer gegebenen Strecke in dem Verhältnis $2\frac{1}{3} : 4\frac{3}{4}$ steht.

6) Wenn a, b, c, m, n gegebene Längenzahlen sind, so soll man α) eine Strecke x so konstruieren, dafs $x = \frac{a \times b}{m}$ (§ 42 b) und β) eine Strecke y so konstruieren, dafs $y = \frac{a \times b \times c}{n \times m}$. (Benutze α.)

7) Zwei Strecken zu zeichnen, wenn gegeben ist:

α) die Summe und das Verhältnis derselben,

β) die Differenz und das Verhältnis derselben (§ 42 c).

8) Eine gegebene Strecke in drei Teile x, y, z zu teilen, so dafs sich verhält:

$$x : y = n : p,$$
$$y : z = q : r.$$

9) α) Aus dem Verhältnis $a : b = m : n$ zweier Strecken und der einen derselben $a = l$ läfst sich die andere als vierte Proportionale finden. Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a : b = m : n$, $a = l$ und α (γ, h, $p - q$, $\alpha - \beta$, r, t). 2. $a : b = m : n$, β und h (p, r). 3. $a : b : c = 5 : 6 : 7$ und $a = 8$ cm. 4. $a : b = 7 : 8$, $b : c = 10 : 11$ und $a = 9$ cm.

β) In diesen Aufgaben kann das Verhältnis $a : b$ auch durch das Verhältnis $h' : h''$ gegeben sein; denn aus $a \,.\, h' = b \,.\, h'' = 2\omega$ folgt $a : b = h'' : h'$.

γ) Aus der Summe oder Differenz zweier Strecken $a \pm b = s$ und ihrem Verhältnis $a : b = m : n$ kann man diese Strecken konstruieren (Teilung von s nach $m : n$) oder berechnen. — Konstruiere ein Dreieck aus: 1. $a \pm b = s$, $a : b = m : n$ und h ($h + p$). 2. $c = l$, $p : q = m : n$ und γ (m, $a + h$). 3. $a : b = m : n$, $h_a + h_b = s$ und c. In diesen Aufgaben kann man die gegebene Gröfse $a : b$ auch durch das gegebene Verhältnis der Höhen ersetzen: $a : b = h'' : h$.

δ) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n$, c und h (w, t, $p - q$, $p : q$).

ε) Konstruiere ein Dreieck aus t', t'' und c (a, h, $t''' \sphericalangle ct'$).

ζ) Ein Dreieck zu konstruieren aus: 1. $a : b$, c, $\sphericalangle t't''$. 2 c, $a : b$, $t' : t''$. 3. c, r, $t' : t''$. 4. c, $a : t'$, $b : t''$. — Verlängere c beiderseits um sich selbst. — Hilfsdreieck mit den Seiten $3c$, $2t'$, $2t''$.

10) Jede durch den Winkelscheitel gezogene Gerade teilt alle diejenigen Strecken nach demselben Verhältnis, welche zu einander parallel in den Winkel eingelegt sind. Andeutung. (Fig. 41.) $r : r' = s : s'$, weil beide Verhältnisse $= AD : AD'$ sind. Vertausche die mittleren Glieder.

11) In einem Winkel seien parallele Strecken eingelegt. Der geometrische Ort aller Punkte, welche diese Strecken innen und aufsen nach dem Verhältnis $r : s$ teilen, besteht aus zwei durch den Scheitel gezogenen Geraden.

12) Eine Mittellinie im Dreieck halbiert alle Strecken, welche parallel zur entsprechenden Seite in das Dreieck eingelegt werden.

13) Eine Diagonale im Parallelogramm halbiert alle Strecken, welche parallel zur andern Diagonale in das Parallelogramm eingelegt sind.

14) α) Die Mittelpunkte (N, O in Fig. 42) zweier Höhenabschnitte, welche von den Ecken des Dreiecks bis zu dem Schnittpunkte (H) der Höhen (§ 2, Üb. 68) reichen (obere Höhenabschnitte), bilden mit den Mittelpunkten der diesen Höhen zugehörigen Seiten ein Rechteck.

β) Die Fufspunkte der beiden Höhen liegen auf demjenigen Kreise, welcher um das Rechteck beschrieben ist.

15) Die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte, die Fufspunkte der Höhen und die Mittelpunkte der Dreiecksseiten liegen auf einem Kreise (Feuerbachscher Kreis). Andeutung. Die dem Eckpunkte A und der Seite BC zugeordneten Punkte N, A' A'' bestimmen einen Kreis. Nach Übung 14 liegen auf diesem Kreise auch die Punkte O, B', B'', welche in analoger Weise dem Eckpunkte B und der Seite AC zugeordnet sind. Ebenso wird gezeigt, dafs der Kreis auch durch die Punkte P, C', C'' geht. Mittelpunkt dieses Kreises ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Rechteck $NOA'B'$.

16) Wenn man in den Punkten B, C . . . einer Geraden (Fig. 43) parallele Strecken b, c . . . anlegt, welche sich verhalten wie die Abstände der Punkte B, C . . . von A, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einer durch A gehenden Geraden. Andeutung. Der Endpunkt von b heifse B'. Die Gerade AB' werde von dem Träger der Strecke c in C' getroffen. Dann hat

man nach § 41 c) $AB : AC = b : CC'$, und nach der Voraussetzung $AB : AC = b : c$. Folglich ist $CC' = c$ und C' der Endpunkt der Strecke c. Ebenso zeigt man, dafs die Endpunkte der übrigen Strecken auf der Geraden AB' liegen.

17) a, b seien zwei gegebene Gröfsen. Die Gröfse x heifst das harmonische Mittel zwischen a und b, wenn $a - x : x - b = a : b$, oder wenn $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Man beweise, dafs in der Figur 83 auf Seite 47 der Abstand CD zweier zugeordneter Punkte das harmonische Mittel zwischen AD und BD ist. Andeutung. Die Proportion $AD - CD : CD - BD = AD : BD$ ist mit der andern $CA : CB = DA : DB$, welche die harmonische Punktgruppe definiert, identisch.

18) α) Verbindet man irgend einen Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten eines Durchmessers, so teilen diese Linien jede zu dem Durchmesser senkrechte Sehne harmonisch.

β) Verbindet man irgend einen Punkt auf der Peripherie eines Kreises mit den Endpunkten einer Sehne, so wird der zu dieser Sehne senkrechte Durchmesser harmonisch geteilt.

19) a und b (Fig. 44) seien zwei Gerade und c eine dritte durch den Schnittpunkt von a und b gezogene Gerade. Für jeden Punkt von c hat das Verhältnis der (senkrechten) Abstände von a und b denselben Wert $r : s$. (Verfahre beim Beweis gerade wie in Übung 10.)

20) Für keinen andern Punkt innerhalb eines der von c durchzogenen Scheitelwinkel hat das Abstandsverhältnis von a und b denselben Wert $r : s$. Andeutung. (Fig. 44.) Ziehe durch N eine Parallele zu a, welche c in M trifft. Dann ist $NU = MP$, aber NV von MQ verschieden. Deshalb kann $NU : NV$ nicht gleich $MP : MQ$ sein.

21) Das Verhältnis $r : s$ sei gegeben. Man soll die Gerade c bestimmen. Andeutung. Errichte irgendwo auf a die Strecke r und auf b die Strecke s senkrecht. Ziehe durch die Endpunkte Parallelen bezüglich zu a und b. Sie schneiden sich in einem Punkte der Geraden c.

22) Man kann nach 21) noch eine zweite Gerade c' bestimmen, welche die Nebenwinkel der von c durchzogenen Winkel teilt und deren Punkte ebenfalls das Verhältnis $r : s$ der Abstände von a und b haben.

23) Der geometrische Ort aller Punkte, für welche das Verhältnis ihrer Abstände von zwei konvergenten Geraden a und b denselben Wert $r : s$ hat, besteht aus zwei durch den Schnittpunkt von a und b gezogenen Geraden.

24) Gerade Linien zu finden, deren Abstände von den Punkten A und B sich wie $r:s$ verhalten. Andeutung. Alle Geraden dieser Art bilden zwei Strahlenbüschel, deren Scheitel C und D diejenigen Punkte sind, welche den Abstand AB innen und aufsen nach dem Verhältnis $r:s$ teilen.

25) Auf einer Geraden g einen Punkt P zu suchen, für welchen α) das Verhältnis der Abstände von zwei Geraden a und b, β) das Verhältnis der Abstände von zwei Punkten A und B einen gegebenen Wert hat. (Jedesmal zwei Auflösungen. Vergleiche für α) Üb. 23 und für β) den Satz 46 a.)

26) Durch einen Punkt P eine Gerade g zu ziehen, für welche das Verhältnis der Abstände von den Punkten A und B einen gegebenen Wert $r:s$ hat. (Zwei Auflösungen, siehe Übung 24.)

27) α) Einen Punkt P anzugeben, dessen Abstände von drei Geraden a, b, c (die sich nicht in einem Punkte schneiden) sich wie $r:s:p$ verhalten. Andeutung. (Fig. 45.) Ziehe durch den Schnittpunkt von a und b die beiden Geraden c' und c'' als Ort der Punkte, deren Abstände von a und b sich wie $r:s$ verhalten. Ziehe ferner durch den Schnittpunkt von a und c die Geraden b' und b'' als Ort der Punkte, deren Abstände von a und c sich wie $r:p$ verhalten. Die Geraden c', c'', b', b'' liefern die Schnittpunkte P', P'', P''', P^{IV}, deren Abstände von a, b, c sich offenbar wie $r:s:p$ verhalten. Zieht man noch durch den Schnittpunkt von b und c die Geraden a', a'' als Ort der Punkte, deren Abstände von b und c sich wie $s:p$ verhalten, so mufs jeder der vier Punkte P' bis P^{IV} noch auf einer der Geraden a' a'' liegen (Üb. 23). Diese vier Punkte P', P'', P''', P^{IV} bilden also die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Seiten die Geraden a', a'', b', b'', c', c'' sind. Die Ecken des von den gegebenen Geraden bestimmten Dreiseits sind Nebenecken in jenem vollständigen Viereck. Man kann also sagen, dafs die Abstände jedes Eckpunktes dieses vollständigen Vierecks von den Geraden, welche die Nebenecken verbinden, sich wie $r:s:p$ verhalten.

28) Eine Gerade zu bestimmen, deren Abstände von drei Punkten A, B, C (die nicht auf einer Geraden liegen) sich wie $r:s:p$ verhalten. Andeutung. Bestimme die Punkts C', C'' (Fig. 46), welche die Strecke AB innen und aufsen nach dem Verhältnis $r:s$ teilen. C' und C'' sind Scheitel zweier Strahlenbüschel, deren Strahlen die Eigenschaft haben, dafs ihre Abstände von A und B sich wie $r:s$ verhalten (Üb. 24). Bestimme auch die Punkte B' und B'', welche die Strecke AC innen und aufsen nach dem Verhältnis $r:p$ teilen. B' und B'' sind Scheitel zweier Strahlbüschel, deren Strahlen die Eigenschaft haben, dafs ihre Abstände von A und C sich wie $r:p$ verhalten. Durch Ver-

bindung der vier Punkte C', C'', B', B'' erhält man die Geraden g' g'', g''', g^{IV}, deren Abstände von A, B, C sich wie $r:s:p$ verhalten. Nach Übung 24 mufs jede dieser Geraden durch einen der Punkte A', A'' gehen, welche die Strecke BC innen und aufsen nach dem Verhältnis $s:p$ teilen. Die vier Geraden g', g'', g''', g^{IV} sind also die Seiten eines vollständigen Vierseits mit den Ecken C', C'', B', B'', A', A''. Die gegebenen Punkte A, B, C sind die Ecken des durch die Diagonalen des Vierseits gebildeten Dreiecks. Die Abstände einer jeden Seite dieses vollständigen Vierseits von A, B, C verhalten sich wie $r:s:p$.

29) Einen Punkt zu bestimmen, dessen Abstände von A, B, C (Fig. 46) sich wie $r:s:p$ verhalten. Andeutung. Über C', C'' (C', C'' sind die schon in Übung 28 bestimmten Punkte) als Durchmesser ziehe einen Kreis als Ort der Punkte, deren Abstände von A und B sich wie $r:s$ verhalten (§ 46 a). Ziehe auch über $B'B''$ als Durchmesser einen Kreis, als Ort der Punkte, deren Abstände von A und C sich wie $r:p$ verhalten. Wenn sich die Kreise schneiden, so hat man zwei Punkte P', P'' gefunden, deren Abstände von A, B, C sich wie $r:s:p$ verhalten. Nach § 46 a) müssen diese Punkte auch auf dem Kreise liegen, der über $A'A''$ als Durchmesser gezogen ist. Die Durchmesser der drei Kreise, welche durch die Punkte P', P'' gehen, sind die auf den Diagonalen des Vierseits gelegenen Abstände gegenüberliegender Ecken.

30) Innerhalb eines Winkels CAB (Fig. 106 auf Seite 61) ist Punkt D gegeben; durch ihn soll die Gerade BC so gezogen werden, dafs α) $DB:DC = m:n$, β) $DB:BC = m:n$, γ) $AB:AC = m:n$.

31) Konstruiere ein Dreieck aus 1) $a:b = m:n$, $a = l$ und α (γ, h, $p-q$, $\alpha-\beta$, r, t). 2) $a:b = m:n$, β und h (p, r). 3) $a:b:c = 5:6:7$ und $a = 8$ cm. 4) $a:b = 7:8$, $b:c = 10:11$ und $a = 9$ cm.

32) In diesen Aufgaben kann das Verhältnis $a:b$ auch durch $h':h''$ gegeben sein; denn aus $a \,.\, h' = b \,.\, h'' = 2\,\omega$ folgt: $a:b = h'':h'$.

33) Wenn $h':h'':h''' = m:n:o$, so sollen die Verhältnisse der Seiten bestimmt werden $\left(a:b:c = \frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{o}\right)$.

34) Konstruiere ein Dreieck aus 1) $a \pm b = s$, $a:b = m:n$ und h ($h+p$). 2) $c = l$, $p:q = m:n$ und γ (t, $a+h$). 3) $a:b = m:n$, $h'+h'' = s$ und c.

35) In 34 ersetze $a:b$ durch $h':h'' = m:n$.

36) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a:b = m:n$, c und h (w, t, $p-q$, $p:q$).

37) Ein Dreieck zu konstruieren aus $a : b = m : n = 2 : 3$ (oder $h' : h'' = 3 : 2$) und t. Zwischen welchen Zahlen mufs der Wert von t angenommen werden, damit die beiden in Betracht kommenden Örter gemeinsame Punkte haben? Antwort:

$$t < \frac{c}{2} \cdot \frac{n+m}{n-m} \quad \text{und} \quad t > \frac{c}{2} \frac{n-m}{n+m}.$$

38) In Figur 85 auf Seite 48 DC parallel AB so zu ziehen, dafs 1) $AB : DC = m : n$. 2) $OD : DC = DC : AB$. 3) $OD : DC = DC : OB$. 4) $DC : AD = OC : AB$. 5) $AD : AB = BC : DB$.

39) Konstruiere ein Dreieck aus t', t'' und c (a, t, $\sphericalangle ct'$).

Übungen zu Abschnitt VI (Ähnlichkeit der Figuren). § 8.

1) Gleichschenklige Dreiecke sind ähnlich, α) wenn der Winkel an der Spitze, β) wenn das Verhältnis von Grundlinie und Schenkel in beiden gleich ist.

2) Rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie α) einen spitzen Winkel, β) das Verhältnis der Katheten, γ) das Verhältnis der Hypotenuse zu einer Kathete entsprechend gleich haben.

3) Beweise, dafs die folgenden Linien zwei ähnliche Dreiecke in Teildreiecke zerlegen, welche wiederum paarweise ähnlich sind: α) entsprechende Höhen, β) entsprechende Mittellinien, γ) entsprechende Winkelhalbierende, δ) die Radien der umbeschriebenen Kreise, ε) die Radien der einbeschriebenen Kreise (nach den Berührungspunkten).

4) In ähnlichen Dreiecken verhalten sich wie entsprechende Seiten: α) entsprechende Transversalen, Radien der einbeschriebenen und umbeschriebenen Kreise, β) Summen und Differenzen aus solchen Strecken. Anleitung zum Beweis von β: Aus $a : a' = t : t' = r : r = m$ folgt $a = m . a'$, $t = m . t'$, $r = m . r'$; $a + t = r = m\,(a' + t' + r')$, $(a + t + r) : (a' + t' + r') = m = a : a'$. t' bedeutet hier die t entsprechende Mittellinie des zweiten Dreiecks.

5) Konstruiere eines der unendlich vielen Dreiecke, welche möglich sind, wenn gegeben ist: 1) $a : h$ und α (γ, $\alpha - \beta$). 2) $h : p$ und α (γ, $\alpha - \beta$). 3) $(a \pm b) : c$ und α. 4) $c : h$ und γ. 5) $a : b : h$. 6) $t : h : c$. 7) $c : h' : h''$.

6) Ähnlichkeitsmethode: Wenn bei einer Konstruktionsaufgabe (z. B. Dreieck aus α, β, $c + h = l$) nach Ausscheidung einer Längenangabe ($c + h = l$) die übrigen Bedingungen durch eine der gesuchten Figur F ähnliche Figur F' erfüllt werden, so konstruiere man F'. Findet man, dafs diejenige Länge, welche

in der gesuchten Figur gleich l sein soll ($c + h = l$) in F' die Gröſse l' hat ($c' + h' = l'$), so hat man nur F ähnlich F' so zu zeichnen, daſs zwei entsprechende Seiten sich wie $l : l'$ verhalten ($a : a' = l : l'$) und die ausgeschiedene Bedingung wird nun auch erfüllt sein. Beweis: $c + h : c' + h' = a : a'$ (Üb. 4) $= l : l'$ (nach Konstruktion); da aber $c' + h' = l'$ (Eigenschaft der Hilfsfigur), so folgt $c + h = l$.

7) Dreiecke zu konstruieren aus den Bedingungen einer der Aufgaben in Übung 5 und einem der folgenden Stücke: 1. t', 2. w''', 3. r, 4. ϱ, 5. $a + c$, 6. $c + h$, 7. $a + t'$, 8. $r + \varrho$, 9. $h' + h'' + h'''$.

Konstruiere ein Viereck aus:

8) $a : b$, β und c, d, e; (e, f, ε; c, α, γ; f, α, ε; c, δ, ε).

9) $a : b : c$, α, β, d.

10) $a : b : c$, e, β, δ.

11) Dem Punkte A, welcher eine Strecke der Figur F nach einem gegebenen Verhältnis innen (auſsen) teilt, entspricht in der ähnlichen Figur F' ein Punkt A', welcher die homologe Strecke innen (auſsen) nach demselben Verhältnis teilt. Sind F und F' perspektivisch gelegen, so geht die Gerade AA' durch den Ähnlichkeitspunkt. Die parallelen Seiten eines Trapezes können z. B. als ähnliche Figuren in perspektivischer Lage betrachtet werden, so daſs der Schnittpunkt der konvergenten Seiten oder der Schnittpunkt der Diagonalen den Ähnlichkeitspunkt vorstellt. Die Mittelpunkte der parallelen Seiten entsprechen sich für diese beiden Ähnlichkeitspunkte, folglich geht ihre Verbindungslinie durch diese Ähnlichkeitspunkte.

12) Dem Schnittpunkte A zweier Diagonalen in dem Vieleck F entspricht der Schnittpunkt A' der homologen Diagonalen in dem ähnlichen Vieleck F'. Liegen F und F' perspektivisch, so geht AA' durch den Ähnlichkeitspunkt.

13) Ähnliche Figuren in perspektivischer Lage sind durch den Ähnlichkeitspunkt und zwei parallele Geraden als entsprechende Strahlen bestimmt. Man soll zu irgend einem weitern Punkte B den entsprechenden suchen.

14) Daſs die entsprechenden Winkel von ähnlichen Figuren in perspektivischer Lage immer gleichen Sinnes sind, erkennt man sofort, wenn die Figuren einen äuſseren Ähnlichkeitspunkt haben. Haben aber die beiden Figuren einen inneren Ähnlichkeitspunkt S, so gebe man der einen eine halbe Umdrehung um diesen Ähnlichkeitspunkt. Diese Drehung hat den Sinn der Winkel nicht verändert. Da aber nunmehr S ein äuſserer Ähnlichkeitspunkt ist, so erkennt man, daſs je zwei entsprechende Winkel gleichen Sinnes sind.

15) Die entsprechenden Dreiecke ähnlicher Figuren sind immer gleichen Sinnes, wenn diese Figuren in perspektivischer Lage sind (Üb. 14). Wendet man die eine Figur um, so hat man ähnliche Figuren in schiefer Lage, bei welchen je zwei entsprechende Dreiecke verschiedenen Sinnes sind. Siehe die Anmerkung unter der Seite.

16) Zwei Figuren (Vielecke) sind ähnlich, wenn zwei Punkte (A und B) der einen Figur mit den übrigen Punkten (CDE..) derselben Figur Dreiecke bilden, welche den entsprechenden Dreiecken der andern Figur ähnlich sind*). Andeutung. Die Dreiecke ABC, ABD, ABE (Fig. 47) seien bezüglich den Dreiecken $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'B'E'$ ähnlich. Wegen der Gleichheit entsprechender Winkel können die Vielstrahlen A und A' zur Deckung gebracht werden, und der gemeinsame Scheitel heiſse S. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt nach § 48 b) $SB : SB' = SC : SC' = SD : SD' = SE : SE'$. Die Figuren sind also nach der Definition in § 47 a) ähnlich.

17) In § 48 c ist gezeigt worden, wie zwei ähnliche Figuren durch Aufsuchen von Paaren entsprechender Punkte vervollständigt werden können, wenn zwei Paare entsprechender Punkte oder zwei entsprechende Strecken AB und $A'B'$ der Lage nach gegeben sind. Aus der zweiten Konstruktion in § 48 c geht hervor, daſs nur eine Figur $A'B'$.. besteht, welche der Figur AB.. ähnlich ist. Man kommt also immer auf diese eine Figur, sei es, daſs man in der ersten Konstruktion die Punkte A, A' vereint, oder daſs man B und B', C und C' u. s. w. in einen Punkt (Ähnlichkeitspunkt) zusammenfallen läſst.

18) Zwei ähnliche Figuren gleichen Sinnes liegen perspektivisch, wenn zwei entsprechende Seiten parallel sind. Andeutung. (Fig. 48.) Der Schnittpunkt S von AA' und BB' entspricht in beiden Figuren sich selbst, weil die Dreiecke ASB und $A'SB'$ ähnlich sind. Dem Winkel ASC entspricht in der zweiten Figur ein Winkel von demselben Sinne und derselben Gröſse. Da die Anfangsschenkel zusammenfallen, so thun dies auch die Endschenkel SC und SC', das heiſst der zu C homologe Punkt C' liegt auf SC.

19) Durch einen Punkt C (Fig. 49) eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte der Geraden a und b zu ziehen. Andeutung. Zeichne das Dreieck CAB (A und B willkürlich auf a und b). Ziehe durch einen Punkt A' von a die Gerade

*) Entweder müssen je zwei entsprechende Dreiecke gleichen, oder je zwei entsprechende Dreiecke entgegengesetzten Sinnes sein. Im letzten Falle muſs man zur Herstellung der perspektivischen Lage die eine Figur umkehren.

$A'B' \parallel AB$. Mache nach § 49 a) das Dreieck $A'B'C'$ ähnlich ABC, so ist CC' die gesuchte Gerade.

20) Mit einer gegebenen Richtung c (Fig. 50) parallel eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte der Geraden a und b zu ziehen. Andeutung. Ziehe durch einen Punkt S von a die Strahlen SD und SG. Zeichne das Dreieck ADG, welches eine Seite auf c (oder mit c parallel) hat. Bestimme den Schnittpunkt D', ziehe $D'G' \parallel DG$ und ziehe durch G' den Strahl d parallel mit GA. d geht durch den gesuchten Punkt A'.

21) In einem Vierecke (Fig. 51) sind nur zwei Gegenpunkte A und C zugänglich, man soll die zweite Diagonale ziehen. Andeutung. Zeichne die Diagonale AC und mit ihrer Hilfe das Viereck $AB'C'D'$ ähnlich dem gegebenen. Ziehe die Diagonale $B'D'$ und bestimme die homologe Gerade der andern Figur. Hierzu ziehe $O'E'$ und $C'E'$ (E' beliebig auf AD'), ziehe auch $CE \parallel E'E'$ und $EO \parallel E'O'$. O ist ein Punkt der gesuchten Diagonale.

22) Die Ecken eines Vierecks sind sämtlich unzugänglich. Man soll die Diagonalen ziehen. Andeutung. Man nehme auf den Seiten a, b, c, d vier Punkte A, B, C, D an und zeichne ein ähnliches Viereck A, B', C', D', so daſs A der Ähnlichkeitspunkt beider Vielecke wird. Zieht man nun durch B', C', D' Parallele mit b, c, d, so hat man ein mit dem gegebenen ähnliches Viereck und kann wie in 21 verfahren.

23) In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H (Fig. 52) der Höhen, der Schwerpunkt S und der Mittelpunkt M des umbeschriebenen Kreises in gerader Linie. Der Schwerpunkt teilt den Abstand der übrigen Punkte nach dem Verhältnisse $2:1$. (Lehrsatz von Euler.) Andeutung. Die Endpunkte A, B der Grundlinie mit dem Schnittpunkte H der Höhen einerseits und die Mitten A', B' der übrigen Seiten mit dem Mittelpunkte M des umbeschriebenen Kreises andererseits bilden ähnliche Dreiecke in perspektivischer Lage. Ihr Ähnlichkeitspunkt ist der Schwerpunkt S.

24) Der auf einer Höhe eines Dreiecks gemessene Abschnitt von einem Eckpunkte bis zum Schnittpunkte der Höhen (oberer Höhenabschnitt) ist doppelt so groſs, als der Abstand der gegenüberliegenden Seite von dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises.

25) Der Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises (§ 7, Üb. 15, Fig. 42) halbiert den Abstand zwischen dem Schnittpunkte H der Höhen und dem Mittelpunkte M des umgeschriebenen Kreises (M ist in Fig. 42 nicht gezeichnet). Andeutung. Die Mittelpunkte N, O zweier oberen Höhenabschnitte mit dem Schnittpunkte H der Höhen einerseits und die Mittelpunkte $A'B'$ der diesen Höhen zugehörigen Seiten mit dem Mittelpunkte M des

umbeschriebenen Kreises andererseits, bilden ähnliche Dreiecke in perspektivischer Lage. Ihr Ähnlichkeitspunkt ist der Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises.

26) Wenn zwei Kreise sich von innen oder von aufsen berühren, so ist ihr Berührungspunkt bezüglich äufserer oder innerer Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise. Andeutung. Der Ähnlichkeitspunkt teilt den Centralabstand nach dem Verhältnis der Radien.

27) Wenn der Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise auf einem dieser Kreise liegt, so berühren sich die Kreise in diesem Punkte. Andeutung. Der Centralabstand CC' wird im Ähnlichkeitspunkte S nach dem Verhältnis der Radien r und r' geteilt. Wenn SC gleich r ist, so mufs SC' gleich r' sein, d. h. S mufs auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte C' liegen.

28) Die Ähnlichkeitspunkte teilen den Centralabstand harmonisch.

29) Für zwei Kreise als ähnliche Figuren gelten folgende Beziehungen:

α) Die Mittelpunkte entsprechen sich für beide Ähnlichkeitspunkte;

β) die Centrale entspricht sich selbst (Ähnlichkeitsstrahl) für beide Ähnlichkeitspunkte;

γ) parallele Radien, ihre Endpunkte und die Tangenten in denselben (siehe § 50 c) entsprechen sich entweder für den äufsern oder für den innern Ähnlichkeitspunkt;

δ) parallele Tangenten entsprechen sich für den äufsern oder für den innern Ähnlichkeitspunkt (ihre Radien sind auch parallel. Siehe γ);

ε) wenn ein Ähnlichkeitsstrahl den einen Kreis schneidet, so schneidet er auch den andern. Auf einem solchen Ähnlichkeitsstrahle liegen zwei Paare entsprechender Punkte;

ζ) wenn ein Ähnlichkeitsstrahl einen Kreis berührt, so berührt er auch den andern. Die Berührungspunkte entsprechen sich. Andeutung. ε) und ζ) folgen aus § 50 c), wenn man bedenkt, dafs der Ähnlichkeitsstrahl sich selbst entspricht.

30) Es ist ein Kreis k gegeben. Man soll einen Kreis k' zeichnen, so dafs die beiden Kreise einen gegebenen Punkt S zum Ähnlichkeitspunkte haben und aufserdem

α) zwei gegebene Punkte A und A' eines Ähnlichkeitsstrahles sich in den ähnlichen Systemen beider Kreise entsprechen;

β) zwei gegebene parallele Geraden sich in den ähnlichen Systemen beider Kreise entsprechen (auf α zurückzuführen);

γ) der Radius des Kreises k' eine gegebene Länge habe (zwei Lösungen);

δ) der Mittelpunkt von k' auf einer gegebenen Geraden liege.

31) Man soll einen Kreis k' zeichnen, welcher einen gegebenen Kreis k berührt, so daſs

α) zwei gegebene Punkte A, A' in den ähnlichen Systemen beider Kreise sich entsprechen;

β) zwei gegebene Gerade in dem System des einen Kreises zweien bezüglich parallelen Geraden im System des andern Kreises entsprechen. (Je zwei Auflösungen.)

Andeutung. α) Nimm einen Schnittpunkt S von AA' mit k als Ähnlichkeitspunkt an (Üb. 26 u. 27). Schneide CS (C Mittelpunkt von k) mit der durch A' zu AC gezogenen Parallelen. β) wird auf α) zurückgeführt.

32) Es ist ein Kreis k (Fig. 53) und eine Gerade a' gegeben. Man soll einen Kreis k' zeichnen, welcher a' in einem bestimmten Punkte A' und auſserdem k berührt. Analysis. Der Tangente a' an k' muſs eine zu a' parallele Tangente (Berührungspunkt A) des Kreises k entsprechen. AA' ist ein Ähnlichkeitsstrahl. Der gesuchte Berührungspunkt S muſs Ähnlichkeitspunkt sein (Üb. 26) und daher auf AA' und k zugleich liegen. Die Konstruktion spreche man selbst aus. Man erhält zwei Lösungen, weil zwei zu a' parallele Tangenten an k gelegt werden können. Beweis. S als Ähnlichkeitspunkt und AA' als entsprechende Punkte bestimmen zwei ähnliche Systeme in perspektivischer Lage, in welchen sich auch a und a' entsprechen. Dem Kreise k, welcher a in A berührt, entspricht ein Kreis k', welcher a' in A' berührt (§ 50 a u. c). Weil der Ähnlichkeitspunkt S auf k liegt, berühren sich die Kreise in S.

33) Ein Kreis k (Fig. 54) und zwei konvergente Gerade a', b' sind gegeben. Einen Kreis k' zu konstruieren, welcher k, a', b' berührt. Analysis. Die Tangenten a' und b' an k' müssen zwei bezüglich zu ihnen parallelen Tangenten a und b des Kreises k entsprechen. Der Schnittpunkt D' von a' und b' entspricht dem Schnittpunkte D von a und b. Der gesuchte Berührungspunkt S muſs Ähnlichkeitspunkt sein, also auf k und DD' zugleich liegen. Die Konstruktion spreche man selbst aus. Hat man die Tangenten a und b gewählt, so erhält man noch zwei Lösungen, weil DD' den Kreis k in zwei Punkten trifft. Aus den zu a' oder b' parallelen Tangenten an k kann man aber a und b auf vier verschiedene Arten wählen. Also acht Lösungen, von denen einzelne wegfallen können, wenn k von den Linien DD' nicht getroffen wird. Beweis. S als Ähnlichkeitspunkt und D, D' als entsprechende Punkte bestimmen zwei ähnliche Systeme, in welchen a und a', b und b' sich entsprechen. Dem Kreise k, welcher a und b berührt, entspricht ein Kreis, welcher

a' und b' berührt (§ 50 a und c). Die Kreise k und k' berühren sich in dem auf k liegenden Ähnlichkeitspunkte (Üb. 27).

34) Ein Kreis k und zwei Gerade a' und b' seien gegeben. Man soll einen Kreis k' zeichnen, welcher seinen Mittelpunkt auf a' hat und b' berührt. Andeutung. Der Geraden b', welche k' berührt, entspricht eine mit b' parallele Tangente b des Kreises k. Dem Durchmesser a' von k' entspricht ein dazu paralleler Durchmesser a von k. Dem Schnittpunkte D' von a' und b' entspricht der Schnittpunkt D von a und b. DD' schneidet den Kreis k in dem gesuchten Berührungspunkte u. s. w. (Vier Lösungen.)

35) Zwei Schnittkreise, welche gleiche Radien haben, bestimmen zu beiden Seiten der Centralen zwei Spitzbogen. Man soll in einem solchen Spitzbogen einen Kreis beschreiben, welcher die Grundlinie und die Seiten des Spitzbogens berührt. Andeutung. Der Mittelpunkt der Grundlinie ist Berührungspunkt. Benütze Übung 32.

36) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Radien und den Bogen eines Kreisausschnittes berührt. Andeutung. Der Berührungspunkt mit dem gegebenen Kreise liegt in der Mitte des Bogens. Die Berührungspunkte mit den beiden Radien findet man durch Tangenten, welche mit den Radien parallel an den gegebenen Kreis gezogen sind.

37) In einen Spitzbogen zwei Kreise einzuzeichnen, von welchen jeder die Grundlinie, die Höhe und die eine Seite berührt (Übung 33).

38) In einen Kreis vier Kreise zu zeichnen, welche den gegebenen Kreis und zwei auf einander senkrechte Durchmesser berühren (Übung 36).

Übungen zu Abschnitt VI. (Zweite Folge.) § 9.

1) In jedem Dreieck ist das Produkt aus zwei Seiten gleich dem Produkte aus der Höhe zur dritten Seite und dem Durchmesser des umbeschriebenen Kreises: $a \cdot b = d \cdot h'''$ (Fig. 55). Andeutung. Die Dreiecke ACD und EBC sind ähnlich.

2) Das Quadrat über einer Winkelhalbierenden (Strecke vom Scheitel bis zum Schnitt mit der Gegenseite) ist gleich dem Produkte aus den einschließenden Seiten, vermindert um das Produkt aus den beiden Abschnitten der Gegenseite: $w'''^2 = a \cdot b - u \cdot v$ (Fig. 56). Andeutung. Die Dreiecke ADC und EBC sind ähnlich und man hat: $b : w''' = (w''' + z) : a$; $w'''^2 + w''' \cdot z = b \cdot a$. Da nun (§ 52 a) $w''' \cdot z = u \cdot v$, so ergiebt sich $w''^2 = b \cdot a - u \cdot v$.

3) Eine Winkelhalbierende (w''') durch die drei Seiten auszudrücken. Andeutung. Aus $u : v = a : b$ und $u + v = c$ ergiebt sich $u . v = \frac{c^2 . a . b}{(a + b)^2}$ und durch Einsetzen (Übung 2) $w'''^2 = b . a - \frac{c^2 . a . b}{(a + b)^2}$. Durch Umformung kann man noch auf $w'''^2 = \frac{a . b}{(a + b)^2} (a + b + c)(a + b - c)$ kommen.

4) Im rechtwinkligen Dreieck $w''' = \frac{a . b . \sqrt{2}}{a + b}$.

5) Den Radius des umbeschriebenen Kreises durch die drei Seiten des Dreiecks auszudrücken. Andeutung. Nach Übung 1 ist $a . b = d . h'''$ und $a . b . c = d . c . h'''$, d. h. $\frac{a . b . c}{2} = d . \omega$; $\omega = \frac{a . b . c}{2d} = \frac{a . b . c}{4r}$; $r = \frac{a . b . c}{4\omega} = \frac{a . b . c}{4 . \sqrt{s . (s - a)(s - b)(s - c)}}$.

6) Die Abschnitte, in welche die Grundlinie eines Dreiecks durch die Höhe geteilt wird, bilden die äußeren Glieder einer Proportion, deren innere Glieder durch die zugehörige Höhe und denjenigen Abschnitt derselben, welcher von der Grundlinie bis zum Schnittpunkte der drei Höhen reicht, gebildet werden. Andeutung. (Fig. 42.) Die Dreiecke $AC''H$ und $CC''B$ sind ähnlich (siehe § 2, Übung 66).

7) In jedem Kreisvierecke ist das Produkt der Diagonalen gleich der Summe der Produkte der beiden Paare der gegenüberliegenden Seiten (Ptolemäischer Lehrsatz). Andeutung. (Fig. 57.) Mache den Winkel $ABF = CBD$. Aus der Gleichheit der in der Figur gleichbezeichneten Winkel ergiebt sich die Ähnlichkeit der Dreiecke AFB und DCB, sowie die Ähnlichkeit von CFB und DAB, und daraus die Proportionen: $AF : AB = DC : DB$ und $CF : CB = DA : DB$. Aus ihnen ergiebt sich: $AF = \frac{a . c}{g}$ und $CF = \frac{b . d}{g}$. Durch Addition folgt:

$$AF + CF = f = \frac{a . c}{g} + \frac{b . d}{g} \text{ oder } f . g = ac + bd.$$

8) Von einem gegebenen Dreieck $\triangle$ durch eine Parallele mit einer Seite ein Dreieck $\triangle'$ von gegebenem Umring u' abzuschneiden. Andeutung zur Konstruktion. Trage in der Richtung AB den Umring des Dreiecks ABC nach AD und den gegebenen Umring nach AE. Ziehe durch E die Parallele zu DC bis zum Schnitt mit AC.

9) Übung 8 durch Rechnung zu lösen α) wenn $a = 15$, $b = 20$, $c = 25$, $u' = 30$.

10) Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie 4 : 9.

Die Grundlinie des einen ist 2 cm gröſser als die des andern. Wie groſs sind beide Grundlinien?

11) Wenn man über den Seiten a, b, c (c die Hypotenuse) eines rechtwinkligen Dreiecks ähnliche Dreiecke zeichnet, deren Flächen α, β, γ heiſsen sollen, so ist $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Andeutung. $\alpha = p \cdot a^2$, $\beta = p \cdot b^2$, $\gamma = p \cdot c^2$ (§ 49 d). $\alpha + \beta = p\,(a^2 + b^2) = p \cdot c^2 = \gamma$ (vergl. § 38 a).

12) Ein Dreieck zu zeichnen, welches so groſs ist wie α) die Summe, β) die Differenz zweier ähnlichen Dreiecke.

13) Von dem Dreieck ABC (Fig. 58), dessen Fläche δ heiſsen und dessen Seite AC gleich 6,25 sein soll, durch eine Parallele EF zur Grundlinie ein Dreieck mit der Fläche δ' abzuschneiden, wenn α) $\delta' = \frac{1}{4}\delta$, β) $\delta' = \frac{1}{9}\delta$, γ) $\delta = 40$, $\delta' = 22{,}4$.

14) Ein Dreieck durch eine Parallele mit der Grundlinie zu halbieren.

15) In einem rechtwinkligen Dreieck betragen die Abschnitte der Hypotenuse 5 cm und 7 cm. Man soll die Höhe und die Katheten berechnen.

16) Wie groſs ist die Hypotenuse, wenn die zugehörige Höhe 8 m und ein durch sie gebildeter Abschnitt 4 m ist?

17) Zwei Strecken zu konstruieren, wenn gegeben ist: α) die Summe c und die mittlere Proportionale p, β) die Differenz d und die mittlere Proportionale p. Andeutung. β) Zeichne einen Kreis mit d als Durchmesser. Benütze den geometrischen Ort der Punkte, von welchen aus Tangenten von der Länge p an den Kreis gezogen werden können, benütze auch § 52 b.

18) Die Quadrate der Sehnen s', s'', s''', welche von dem einen Endpunkte eines Durchmessers d ausgehen, verhalten sich wie ihre Projektionen x', x'', x''' . . auf den letzteren.

19) Das Verhältnis der Flächen zweier Quadrate soll durch das Verhältnis zweier Strecken dargestellt werden.

20) Zu konstruieren: α) $\frac{x^2}{a^2} = \frac{m}{n}$, β) $x^2 = \frac{2}{5}a^2$.

21) Das Produkt der beiden Abschnitte, in welche eine Höhe eines Dreiecks durch die übrigen geteilt wird, ist für alle Höhen gleich groſs.

22) Wenn in einem Viereck das Produkt der beiden Abschnitte, in welche eine Diagonale durch die andere geteilt wird, für beide Diagonalen gleich ist, so liegen die Ecken des Vierecks auf einem Kreise. Andeutung. Lege einen Kreis durch A, B, C (Fig. 103 auf Seite 60). Zeige, daſs der Schnitt des Kreises mit der durch C gehenden Diagonale der Punkt D sein muſs.

23) Die Punkte, welche dem Schnittpunkte der drei Höhen

in bezug auf die Seiten eines Dreiecks symmetrisch entsprechen, liegen auf dem umbeschriebenen Kreise (Übung 6).

24) Das Dreieck ABC (Fig. 59) in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie mit der gegebenen Richtung a parallel ist. Andeutung. Ziehe $AD \parallel a$; mache CE gleich der mittleren Proportionalen zwischen CD und CB, ziehe durch E eine Parallele mit a bis zum Schnitt mit dem Träger von CA in F. CEF ist das verlangte Dreieck. Beweis. Aus $CB : CE = CE : CD$ und $CA : CF = CD : CE$ (§ 41 b) folgt durch Multiplikation $CA \,.\, CB : CE \,.\, CF = (CE \,.\, CD) : (CD \,.\, CE)$ oder $CA \,.\, CB = CE \,.\, CF$. Die Produkte der den Winkel γ einschliefsenden Seiten sind für beide Dreiecke gleich (vergl. § 37 b, 2).

25) Ein Dreieck $\triangle$ in ein anderes zu verwandeln, das mit einem gegebenen Dreieck $\triangle'$ ähnlich ist. Andeutung. Verwandle das Dreieck $\triangle$ in ein Dreieck $\triangle''$, welches mit dem Dreieck $\triangle'$ einen Winkel entsprechend gleich hat. Lege die Dreiecke so, dafs diese Winkel sich decken und verwandle $\triangle''$ so, dafs die Grundlinie mit der Grundlinie von $\triangle'$ parallel ist (Übung 24).

26) Ein Dreieck $\triangle$ zu konstruieren, welches dem Dreieck $\triangle'$ ähnlich ist und eine gegebene Fläche hat. Die Fläche soll durch ein Dreieck oder ein Parallelogramm (Rechteck, Quadrat) gegeben sein. Andeutung. Die Lösung geschieht durch Üb. 25.

27) Ein Dreieck ABC durch eine Parallele mit der Grundlinie AB so zu teilen, dafs sich das abgeschnittene Stück zum Ganzen wie $m : n$ verhält. Andeutung. Teile CB in n gleiche Teile und ziehe von dem m^{ten} Teilpunkte D (von C aus gerechnet) nach A. Verwandle ADC in ein Dreieck, welches die Grundlinie mit AB parallel hat.

28) α) Alle Punkte auf der gemeinsamen Sehne zweier Kreise k und k' (Fig. 60) haben für beide Kreise gleiche Potenz. (Diese Potenz ist für beide Kreise $MB \,.\, MB'$.)

β) Die von einem Punkte M an beide Kreise gezogenen Tangenten (MD, ME) sind gleich, wenn M auf BB' liegt.

γ) Die durch einen Punkt N gezogenen kleinsten Sehnen beider Kreise sind gleich, wenn N auf BB' liegt.

δ) Die in β) betrachteten Punkte M auf BB' sind Mittelpunkte von Kreisen, welche k und k' rechtwinklig schneiden.

29) Einen Kreis zu ziehen, welcher durch B und B' (Fig. 60) geht und die Gerade a berührt. Analysis. Wenn k durch B und B' geht und die Gerade a in F berührt, so ist AF die mittlere Proportionale von AB und AB'. Die Konstruktion spreche man selbst aus. Man kommt zu zwei Kreisen, weil man die mittlere Proportionale von A beiderseits nach AF und AG abtragen kann. Beweis. Wenn der durch B, B' und F gelegte

Kreis die Gerade a in einem weitern Punkte X träfe, so hätte man $AB \,.\, AB' = AF \,.\, AX$, was mit $AB \,.\, AB' = AF^2$ im Widerspruche steht.

30) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die konvergenten Geraden b und b' berührt und durch einen gegebenen Punkt B geht. Andeutung. Der Kreis geht auch durch den Punkt B', welcher dem Punkte B für die Halbierungslinie a eines von b und b' gebildeten Winkels symmetrisch entspricht. Wende Übung 29 an.

31) An eine Strecke eine andere anzutragen, so daſs die ganze Strecke stetig geteilt ist. Andeutung. (Fig. 105 auf Seite 61.) Trage AD von A aus auf die Verlängerung von BA. Die Verlängerte ist dann gleich AG, und AB ist die mittlere Proportionale zwischen der Verlängerten ($= AG$) und der Verlängerung ($= AD$), nach § 52 b.

Übungen zu Abschnitt VII (Kreisberechnung). § 10.

1) Man soll durch den Radius r ausdrücken: die Seite des einbeschriebenen regelmäſsigen α) Sechsecks, β) Vierecks, γ) Dreiecks. Lösungen: r, $r \,.\, \sqrt{2}$, $r \,.\, \sqrt{3}$.

2) Die kleinen Radien ϱ der Vielecke in 1) zu bestimmen. Lösungen: $\frac{1}{2}\, r \,.\, \sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\, r \,.\, \sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\, r$.

3) Die Flächen der Vielecke in 1) zu bestimmen. Lösungen: $\frac{3}{2}\, r^2 \,.\, \sqrt{3}$, $2\, r^2$, $\frac{3}{4}\, r^2 \,.\, \sqrt{3}$.

4) Durch den Radius r auszudrücken: die Seite des umbeschriebenen regelmäſsigen α) Sechsecks, β) Vierecks, γ) Dreiecks. Lösungen: $\frac{2}{3}\, r \,.\, \sqrt{3}$, $2r$, $2r \,.\, \sqrt{3}$.

5) Die Seite z des einbeschriebenen regelmäſsigen Zehnecks durch r auszudrücken. Andeutung. Aus $r : z = z : r - z$ (§ 52 d) findet sich $z^2 + r \,.\, z = r^2$ und durch Auflösung nach z: $z = \frac{r}{2}\, (\sqrt{5} - 1)$.

6) Den kleinen Radius ϱ des Zehnecks in 5) zu berechnen. Lösung: $\frac{r}{4} \cdot \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

7) Aus der Seite des Zehnecks in 5) die Seite des einbeschriebenen regelmäſsigen Fünfecks nach § 53 b zu berechnen. Lösung: $\frac{1}{2}\, r \,.\, \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

8) Den kleinen Radius des Fünfecks in 7) zu berechnen. Lösung: $\frac{r}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$ oder $\frac{r}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$.

9) Aus der Seite des regelmäſsigen Sechsecks soll die Seite des regelmäſsigen 12-, 24-, 48- . . . Ecks abgeleitet werden.

$$\text{Lösungen: } S_{12} = \sqrt{r2 - \sqrt{3}},\quad S_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$S_{48} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

10) Von den Ecken eines Quadrats (Seite a) sind gleichschenklige Dreiecke abzuschneiden, so daſs ein regelmäſsiges Achteck übrig bleibt. Sein Inhalt ist

$$2a^2\left(\sqrt{2}-1\right) = 0{,}82842\,a^2.$$

11) Den Inhalt des dem regelmäſsigen Dreieck einbeschriebenen Quadrats zu bestimmen. — Eine Seite des Quadrats soll auf einer Seite des Dreiecks liegen. Antwort: $3a^2\left(7-4\sqrt{3}\right)$.

12) Den Inhalt des einem Quadrate einbeschriebenen regelmäſsigen Dreiecks zu bestimmen. — Ein Eck des Dreiecks soll in ein Eck des Quadrats fallen. Antwort: $a^2\left(2\sqrt{3}-3\right)$.

13) Wenn der Radius eines Kreises 2,74 m ist, wie groſs ist die Peripherie auf 0,01 m genau?

14) Die Länge des Erdradius ist 6370 km. Man soll den Umring des Äquators bis auf 10 km genau finden.

15) Man soll bis auf 0,01 m genau den Durchmesser eines Kreises finden, dessen Umfang 542,86 m ist.

16) Man soll bis auf 0,01 m genau den Durchmesser eines Kreises finden, wenn ein Bogen von 52^0 eine Länge von 26,04 m hat.

17) Man soll die Anzahl der Grade, Minuten und Sekunden des Bogens finden, welcher dem Durchmesser gleich ist.

18) Die Fläche eines zwischen zwei koncentrischen Kreisen mit den Radien R und r gelegenen Ringes zu berechnen. Lösung: $\omega = \pi\,(R^2 - r^2)$.

19) In demselben Ringe die Fläche des durch zwei Radien gebildeten Ausschnitts zu bestimmen, wenn die Radien den Winkel α einschlieſsen. Lösung: $\omega = \pi\,(R^2 - r^2)\cdot\frac{\alpha}{360}$.

20) Die Fläche eines Ringes ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser derjenigen Sehne des äuſseren Kreises gleich ist, welche der innere Kreis berührt.

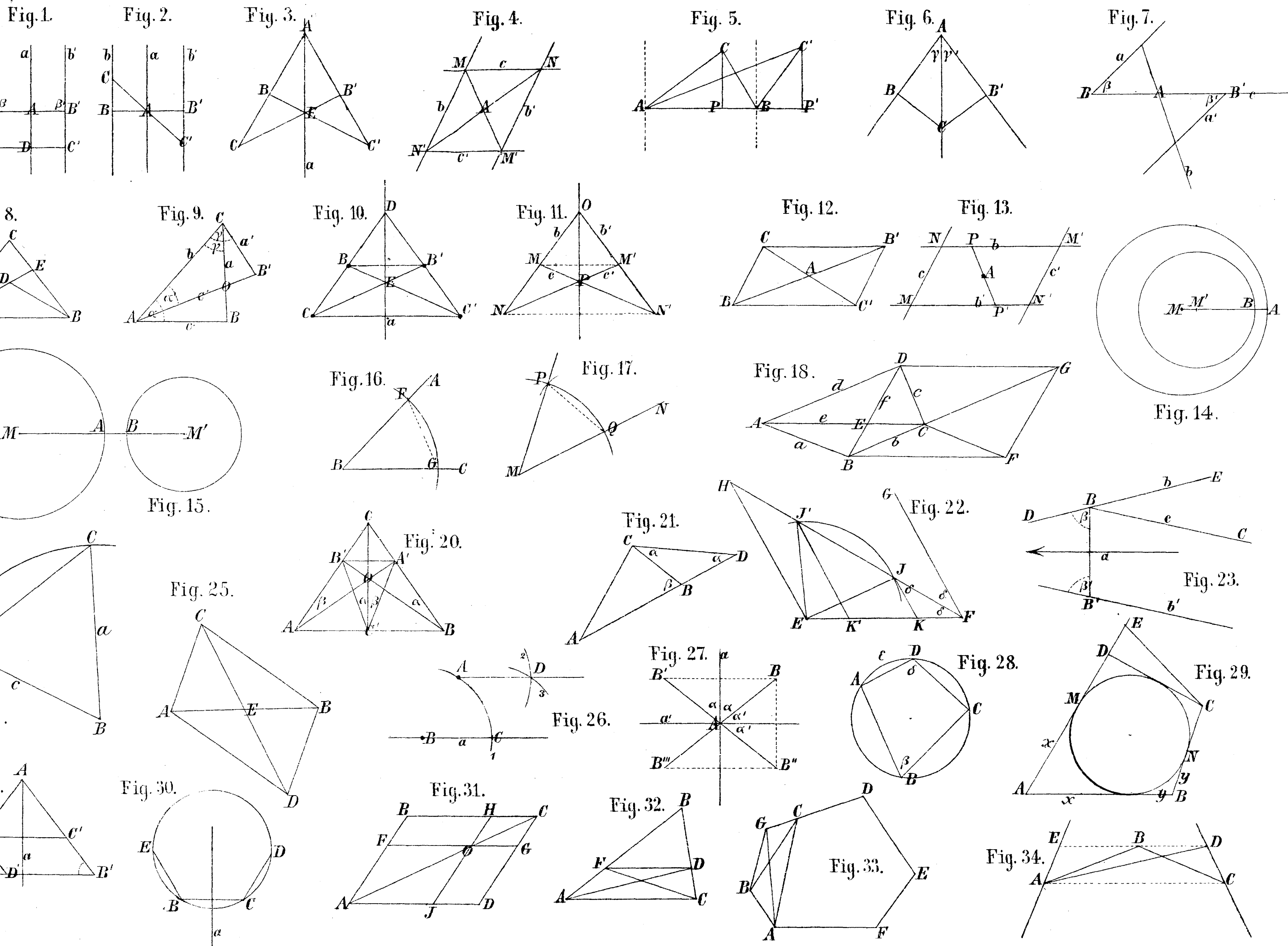
21) Ein kreisförmiger Platz von 75 m Durchmesser wird mit Steinen von 25 cm Länge und 2 cm Breite gepflastert, von denen jeder 40 Pfennige kostet. Wie viel kostet das Pflaster?

22) Die Länge eines Bogens von 60^0 ist 140 m. Wie grofs ist die Fläche des zugehörigen Sektors?

23) Den Radius eines Kreises zu berechnen, wenn der zu einem Bogen von 36^0 gehörige Sektor eine Fläche von 400 Quadratmeter hat.

24) Die Fläche eines Segments zu berechnen, dessen Sehne 100,24 m und dessen Bogen 60^0 beträgt.




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.